تکلیف سری ۱۵ «به نام خدا» لعیا کرباسیان

۱-

$t_۱+t_۲+t_۳=۲۱ \rightarrow \frac{t_۲}{q}+t_۲+t_۲q=۲۱ \Rightarrow \overset{q}{(}\frac{۴}{q}+۴+۴q=۲۱)$

$\underbrace{t_۱\ t_۲\ t_۳}_{t_۲^۲}=۶۴ \rightarrow t_۲^۳=۶۴ \rightarrow t_۲=۴$

$۴+۴q+۴q^۲=۲۱q$

$۴q^۲-۱۷q+۴=۰ \rightarrow q=\frac{۱۷\pm\sqrt{۲۲۵}}{۸}$

$q=\frac{۱۷\pm۱۵}{۸}$

$\boxed{q=۴}$ ✓ چون حسابی

× $q=\frac{۱}{۴}$

۲-

$۴x^۲=(x^۲-۲)(x^۲+۴)$

$۴x^۲=x^۴+۲x^۲-۸$

$۰=x^۴-۲x^۲-۸$

$۰=(x^۲-۴)(x^۲+۲)$

$۰=\underbrace{(x+۲)}_{x=-۲}\underbrace{(x-۲)}_{x=۲}(x^۲+۲)$

$x^۲+۴,\ ۲x,\ x^۲-۲$

① $x=۲ \rightarrow ۸, ۴, ۲ \rightarrow \boxed{q=\frac{۱}{۲}}$

② $x=-۲ \rightarrow ۸, -۴, ۲ \rightarrow$ غلط چون دنباله نزولی نیست

$S_۷=t_۱\left(\frac{q^۷-۱}{q-۱}\right) \rightarrow S_۷=۸\left(\frac{\frac{۱}{۱۲۸}-۱}{\frac{۱}{۲}-۱}\right)=\frac{\frac{-۱۲۷}{۱۲۸}}{\frac{-۱}{۲}}\times۸=\frac{۱۲۷}{۶۴}\times۸$

$=\frac{۱۲۷}{۸}=۱۵,۸۷۵$

۳-

$۱+q+q^۲+q^۳+q^۴=\frac{۱۲۱}{۸۱}$

$t_۱+t_۲+t_۳+t_۴+t_۵$

$۲۴۳+۲۴۳q+۲۴۳q^۲+۲۴۳q^۳+۲۴۳q^۴=۲۴۳(۱+q+q^۲+q^۳+q^۴)$

$=\overset{۳}{\cancel{۲۴۳}}\times\frac{۱۲۱}{\cancel{۸۱}}=۱۲۱\times۳=۳۶۳$

۴-

۱, —, —, A, —, —, ۶۴ حسابی

۱, —, —, B, —, —, ۶۴ هندسی

$\frac{۶۴-۱}{۶}=\frac{۶۳}{۶}=d \rightarrow A=t_۴=۱+۳\times\frac{۶۳}{۶}=۳۲,۵$

$۶۴=r^۶ \rightarrow r=۲ \rightarrow B=a_۴=۱\times۲^۳=۸$

$A+B=۴۰,۵$

۵-

$-۲۴,\ -\frac{۹۵}{۴}\cdots$

$a_{۱۰۱}=a_۱+۱۰۰d=-۲۴+۱۰۰\times\frac{۱}{۴}=-۲۴+۲۵=+۱$

$۱۲۸,\ a_۲,\ \dots$

$a_۸=۱۲۸r^۷=+۱ \rightarrow r^۷=\frac{۱}{۱۲۸} \rightarrow \boxed{r=\frac{۱}{۲}}$

۶-

$t_۳,\ t_۷,\ t_۹$

$t_۱+۲d,\ t_۱+۶d,\ t_۱+۸d \rightarrow \cancel{t_۱^۲}+۳۶d^۲+۱۲t_۱d=\cancel{t_۱^۲}+۱۰t_۱d+۱۶d^۲$

$۲۰d^۲+۲t_۱d=۰$

$\boxed{۰ \leftarrow d}\underbrace{(۲۰d+۲t_۱)}_{۲۰d=-۲t_۱}$

$\boxed{d=\frac{-t_۱}{۱۰}}$

۷-

$t_۲,\ t_۴,\ t_۸$

$\underbrace{t_۱+d,\ t_۱+۳d}_{\overset{۲d\quad ۴d}{r=۲}},\ t_۱+۷d \rightarrow \cancel{t_۱^۲}+۹d^۲+۶t_۱d=\cancel{t_۱^۲}+۸dt_۱+۷d^۲$

$۲d^۲-۲t_۱d=۰$

$۲d(d-t_۱)=۰ \rightarrow d=۰$ × جملات متمایز هستند

$d=t_۱$

$a_{۱۰}=a_۱r^۹ \rightarrow \frac{۱}{۲^۲}\times۲^۹=۲^۷=۱۲۸$

-۸

$۳t_۲ , ۲t_۳ , t_۴$

$۳(t_۱r) , ۲(t_۱r^۲) , t_۱r^۳$

$۴t_۱r^۲ = ۳t_۱r + t_۱r^۳$

$۰ = t_۱r^۳ - ۴t_۱r^۲ + ۳t_۱r$

$۰ = t_۱r(r^۲ - ۴r + ۳) \longrightarrow r^۲ - ۴r + ۳ = ۰$

$(r-۱)(r-۳) = ۰ \begin{cases} r=۱ \\ r=۳ \end{cases}$

له r نمی‌تونه صفر باشه

چون دنباله غیر ثابت

-۹

$۲ , \frac{۷}{۴} , \dots \qquad d = \frac{۷}{۴} - \frac{۸}{۴} = \frac{-۱}{۴}$

$a_۴ = ۲ + ۳(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۵}{۴}$

$a_۸ = ۲ + ۷(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴}$

$a_{۱۳} = ۲ + \overset{۳}{\cancel{۱۲}}(-\frac{۱}{\cancel{۴}}) = -۱$

$\frac{۵}{۴} + x , \frac{۱}{۴} + x , -۱ + x \xrightarrow{\text{راست به چپ}} -۱ + x \underset{\times r}{\curvearrowright} \frac{۱}{۴} + x \underset{\times r}{\curvearrowright} \frac{۵}{۴} + x$

روش اول :

① $-۱ + x$

$\times r$

② $\frac{۱}{۴} + x = -r + xr$

$\times r$

③ $\frac{۵}{۴} + x = \frac{r}{۴} + xr$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{۱}{۴} + x = -r + xr \\ &\frac{۵}{۴} + x = \frac{r}{۴} + xr \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &۱ = \frac{r}{۴} + r \\ &۱ = \frac{۵r}{۴} \to ۴ = ۵r \to \boxed{r = \frac{۵}{۴}} \end{aligned}$$

روش دوم : (در صورت قبول نشدن روش اول)

$(\frac{۱}{۴} + x)^۲ = (-۱ + x)(\frac{۵}{۴} + x)$

$\frac{۱}{۱۶} + \cancel{x^۲} + \frac{x}{۲} = \cancel{x^۲} + \frac{۱}{۴}x - \frac{۵}{۴}$

$\frac{x}{۲} - \frac{x}{۴} = \frac{-۵^{\times۴}}{۴_{\times۴}} - \frac{۱}{۱۶}$

$\frac{x}{۴} = \frac{-۲۱}{۱۶} \longrightarrow x = \frac{-۲۱ \times \cancel{۴}}{\cancel{۱۶}_{۴}} \longrightarrow x = \frac{-۲۱}{۴}$

$\underbrace{\frac{۵}{۴} - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۱۶}{۴} \downarrow -۴} , \underbrace{\frac{۱}{۴} - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۲۰}{۴} \downarrow -۵} , \underbrace{-۱ - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۲۵}{۴}} \longrightarrow r = \frac{۵}{۴}$

-۱۰

هندسی

$t_۱ + t_۴ + t_۷ = ۷۳ \longrightarrow t_۴^۲ = t_۷ t_۱ \longrightarrow t_۴ + t_۴^۲ = ۷۳$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

حسابی $a_۱ \quad a_۲ \quad a_{۱۰}$

$a_۱ , a_۱ + d , a_۱ + ۹d \longrightarrow \frac{d}{۷} + \frac{d}{۷} + d + \frac{d}{۷} + ۹d = ۷۳ \longrightarrow \frac{۷۳d}{۷} = ۷۳ \Longrightarrow \boxed{d = ۷}$

$\cancel{a_۱^۲} + d^۲ + ۲a_۱d = \cancel{a_۱^۲} + ۹a_۱d$

$d^۲ - ۷a_۱d = ۰ \longrightarrow d(\underbrace{d - ۷a_۱}) = ۰$

$۰ \leftarrow$ له $d \neq ۰$ زیرا اگر $d = ۰$ باشد جمع ۷۳ نمی‌شود

$d = ۷a_۱$

$\frac{d}{۷} = a_۱$