لعیا کرابسیان «به نام خدا» ۱۸٫۷۵ تکلیف سری ۱۵

۱- ۱٫۷۵

$t_۱ + t_۲ + t_۳ = ۲۱ \rightarrow \frac{t_۲}{q} + t_۲ + t_۲ q = ۲۱ \Rightarrow q\left(\frac{۴}{q} + ۴ + ۴q = ۲۱\right)$

$\underbrace{t_۱ \; t_۲ \; t_۳}_{t_۲^۲} = ۶۴ \rightarrow t_۲^۳ = ۶۴ \rightarrow t_۲ = ۴$

$۴ + ۴q + ۴q^۲ = ۲۱q$

$۴q^۲ - ۱۷q + ۴ = ۰ \rightarrow q = \frac{۱۷ \pm \sqrt{۲۲۵}}{۸}$

$q = \frac{۱۷ \pm ۱۵}{۸}$

$\boxed{q = ۴}$ ✓ چون حسابی

$q = \frac{۱}{۴}$ × صورت سوال گفته است q عددی غیر حسابی است!

۲- ۲

$۴x^۲ = (x^۲ - ۲)(x^۲ + ۴)$

$۴x^۲ = x^۴ + ۲x^۲ - ۸$

$۰ = x^۴ - ۲x^۲ - ۸$

$۰ = (x^۲ - ۴)(x^۲ + ۲)$

$۰ = \underbrace{(x + ۲)}_{x = -۲}\underbrace{(x - ۲)}_{x = ۲}(x^۲ + ۲)$

$x^۲ + ۴ \;,\; ۲x \;,\; x^۲ - ۲$

① $x = ۲ \rightarrow ۸ , ۴ , ۲ \rightarrow \boxed{q = \frac{۱}{۲}}$

② $x = -۲ \rightarrow ۸ , -۴ , ۲ \rightarrow$ غلط چون دنباله نزولی نیست

$S_۷ = t_۱\left(\frac{q^۷ - ۱}{q - ۱}\right) \rightarrow S_۷ = ۸\left(\frac{\frac{۱}{۱۲۸} - ۱}{\frac{۱}{۲} - ۱}\right) = \frac{\frac{-۱۲۷}{۱۲۸}}{\frac{-۱}{۲}} \times ۸ = \frac{۱۲۷}{۶۴} \times ۸$

✓ $= \frac{۱۲۷}{۸} = ۱۵٫۸۷۵$

۳- ۲

$۱ + q + q^۲ + q^۳ + q^۴ = \frac{۱۲۱}{۸۱}$

$t_۱ + t_۲ + t_۳ + t_۴ + t_۵$

$۲۴۳ + ۲۴۳q + ۲۴۳q^۲ + ۲۴۳q^۳ + ۲۴۳q^۴ = ۲۴۳(۱ + q + q^۲ + q^۳ + q^۴)$

$= \cancel{۲۴۳}^{۳} \times \frac{۱۲۱}{\cancel{۸۱}} = ۱۲۱ \times ۳ = ۳۶۳$ ✓

۴- ۱٫۵

۱ , — , — , A , — , — , ۶۴ حسابی

۱ , — , — , B , — , — , ۶۴ هندسی

$\frac{۶۴ - ۱}{۶} = \frac{۶۳}{۶} = d \rightarrow A = t_۴ = ۱ + ۳ \times \frac{۶۳}{۶} = ۳۲٫۵$

$۶۴ = r^۶ \rightarrow r = ۲ \rightarrow B = a_۴ = ۱ \times ۲^۳ = ۸$ ✓

$r^۶ = ۶۴ \rightarrow r = \pm ۲$

$A + B = ۴۰٫۵$

if $r = -۲ \rightarrow a_۴ = ۱ \times (-۲)^۳ = -۸ \rightarrow -۸ + ۳۲٫۵ = ۲۴٫۵$

۵- ۲

$-۲۴ \;,\; -\frac{۹۵}{۴} \dots$

$a_{۱۰۱} = a_۱ + ۱۰۰d = -۲۴ + ۱۰۰ \times \frac{۱}{۴} = -۲۴ + ۲۵ = +۱$

$۱۲۸ \;,\; a_۲ \;,\; \dots$

$a_۸ = ۱۲۸r^۷ = +۱ \rightarrow r^۷ = \frac{۱}{۱۲۸} \rightarrow \boxed{r = \frac{۱}{۲}}$ ✓

۶- ۲

$t_۳ \;,\; t_۷ \;,\; t_۹$

$t_۱ + ۲d \;,\; t_۱ + ۶d \;,\; t_۱ + ۸d \rightarrow \cancel{t_۱^۲} + ۳۶d^۲ + ۱۲t_۱d = \cancel{t_۱^۲} + ۱۰t_۱d + ۱۶d^۲$

$۲۰d^۲ + ۲t_۱d = ۰$

$\boxed{۰ \leftarrow d}\,(\underbrace{۲۰d + ۲t_۱}_{۲۰d = -۲t_۱})$

$\boxed{d = \frac{-t_۱}{۱۰}}$ ✓

۷- ۲

$t_۲ \;,\; t_۴ \;,\; t_۸$

$t_۱ + d \;,\; t_۱ + ۳d \;,\; t_۱ + ۷d \rightarrow \cancel{t_۱^۲} + ۹d^۲ + ۶t_۱d = \cancel{t_۱^۲} + ۸dt_۱ + ۷d^۲$

$\underbrace{\overset{\downarrow}{۲d} \quad \overset{\downarrow}{۴d}}_{r = ۲}$

$۲d^۲ - ۲t_۱d = ۰$

$۲d(d - t_۱) = ۰ \rightarrow d = ۰$ × جملات متمایز هستند

$d = t_۱$

$a_{۱۰} = a_۱r^۹ \rightarrow \frac{۱}{۲^۲} \times ۲^۹ = \boxed{۲^۷} = ۱۲۸$ ✓

۸- ۱٫۷۵

$۳t_۲ , ۲t_۳ , t_۴$

$۳(t_۱r) , ۲(t_۱r^۲) , t_۱r^۳$

$۴t_۱r^۲ = ۳t_۱r + t_۱r^۳$

$۰ = t_۱r^۳ - ۴t_۱r^۲ + ۳t_۱r$

$۰ = t_۱r(r^۲ - ۴r + ۳) \longrightarrow r^۲ - ۴r + ۳ = ۰$

$(r-۱)(r-۳) = ۰$ ✓ $r=۱$ غ‌ق‌ق (دنباله غیرثابت) !!! ، $r=۳$

↲ r نمی‌تونه صفر باشه
چون دنباله غیرثابت

۹-

$۲ , \frac{۷}{۴} , \dots$ $\quad d = \frac{۷}{۴} - \frac{۸}{۴} = \frac{-۱}{۴}$

$a_۴ = ۲ + ۳(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۵}{۴}$

$a_۸ = ۲ + ۷(-\frac{۱}{۴}) = \frac{۱}{۴}$

$a_{۱۳} = ۲ + ۱۲(-\frac{۱}{۴}) = -۱$

$\frac{۵}{۴}+x , \frac{۱}{۴}+x , -۱+x \xrightarrow{\text{[illegible]}} -۱+x \underset{\times r}{\curvearrowright} \frac{۱}{۴}+x \underset{\times r}{\curvearrowright} \frac{۵}{۴}+x$

۲

روش اول :

① $-۱+x$ $\quad \times r$

② $\frac{۱}{۴}+x = -r + xr$ $\quad \times r$

③ $\frac{۵}{۴}+x = \frac{r}{۴} + xr$

$۱ = \frac{r}{۴} + r$

$۱ = \frac{۵r}{۴} \to ۴ = ۵r \to \boxed{r = \frac{۵}{۴}}$ ✓

روش دوم : (در صورت قبول نشدن روش اول)

$(\frac{۱}{۴}+x)^۲ = (-۱+x)(\frac{۵}{۴}+x)$

$\frac{۱}{۱۶} + \cancel{x^۲} + \frac{x}{۲} = \cancel{x^۲} + \frac{۱}{۴}x - \frac{۵}{۴}$

$\frac{x}{۲} - \frac{x}{۴} = \frac{-۵}{۴} - \frac{۱}{۱۶}$

$\frac{x}{۴} = \frac{-۲۱}{۱۶} \to x = \frac{-۲۱ \times ۴}{۱۶} \to x = \frac{-۲۱}{۴}$

$\underbrace{\frac{۵}{۴} - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۱۶}{۴} \to -۴} , \underbrace{\frac{۱}{۴} - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۲۰}{۴} \to -۵} , \underbrace{-۱ - \frac{۲۱}{۴}}_{\frac{-۲۵}{۴}}$ ✓ $\longrightarrow r = \frac{۵}{۴}$

۱۰- ۱٫۷۵

هندسی $t_۱ + t_۴ + t_۷ = ۷۳ \longrightarrow t_۴^۲ = t_۷ t_۱ \longrightarrow t_۴ + t_۴^۲ = ۷۳$

حسابی $a_۱ \quad a_۲ \quad a_{۱۰}$

$a_۱ , a_۱+d , a_۱+۹d \longrightarrow \frac{d}{۷} + \frac{d}{۷} + d + \frac{d}{۷} + ۹d = ۷۳ \longrightarrow \frac{۷۳d}{۷} = ۷۳ \Longrightarrow \boxed{d=۷}$ ✓

$\cancel{a_۱^۲} + d^۲ + ۲a_۱d = \cancel{a_۱^۲} + ۹a_۱d$

$d^۲ - ۷a_۱d = ۰ \longrightarrow d(\underbrace{d - ۷a_۱}) = ۰$

$d = ۷a_۱$

$\frac{d}{۷} = a_۱$

↲ ۰ ↲ $d \neq ۰$ زیرا اگر $d=۰$ باشد
مجموع ۷۳ نمی‌شود

اگر هر ۳ جمله $\frac{۷۳}{۳}$ باشند
مجموع هم ۷۳ است

$a_۱ = a_۴ = a_۷ = \frac{۷۳}{۳} \quad , d = ۰$