①

$a_1 = \frac{1}{۲}$ ، $q = ۲$

الف) $a_{۱۰} = \frac{1}{۲} \times ۲^۹ = ۲۵۶$

ج) $b^۲ = ac \rightarrow \sqrt{۴ \times ۲۵۶} = \sqrt{۲^{۱۰}} = ۲^۵ = ۳۲$

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} = q^{۱۷-۱۳} = q^۴ = ۲^۴ = ۱۶$

د) $a_n = a_1 q^{n-1} \rightarrow ۱۲۸ = \frac{1}{۲} \times ۲^{n-1} \Rightarrow \underbrace{۲۵۶}_{۲^۸} = ۲^{n-1} \Rightarrow n-1 = ۸$ ، $n = ۹$

②

$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m} \rightarrow q^{۸-۵} = \frac{۹۶}{۱۲} \Rightarrow q^۳ = ۸ \Rightarrow q = ۲$

$a_n = a_m \times q^{n-m} \Rightarrow a_{۱۰} = a_۸ \times ۲^۲ \Rightarrow a_{۱۰} = ۹۶ \times ۴ = ۳۸۴$

③

الف) $\left(\frac{a_۳}{q^۲}\right) \times \left(\frac{a_۳}{q}\right) \times (a_۳) \times (a_۳ q) \times (a_۳ q^۲) = a_۳^۵ = \overbrace{۲۴۳}^{۳^۵} \Rightarrow a_۳ = ۳$

ب) $\frac{۳}{q^۲} \times (۳q^۲) = ۹$

④

$۴\sqrt{۲} = ۲^{\frac{۵}{۲}}$ ، $b^۲ = ac \rightarrow (۲^{\frac{۵}{۲}})^۲ = ۲^a \times ۲^b \Rightarrow ۲^۵ = ۲^a \times ۲^b$

$\Rightarrow ۲^۵ = ۲^{a+b} \Rightarrow a+b = ۵ \Rightarrow \frac{a+b}{۲} = \frac{۵}{۲}$

⑤

$۱۱ - ۷ = ۴ \qquad ۷ - ۳ = ۴$

$\rightarrow x^۲ = (۱-x)(x+۱) \Rightarrow x^۲ = ۱ - x^۲ \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{۲}}$

$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} = \pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

⑥

$a_1 + aq^۳ = ۲۸ \rightarrow a(۱+q^۳) = ۲۸$

$aq + aq^۲ = ۱۲ \rightarrow aq(۱+q) = ۱۲$

$\frac{a_1(۱+q^۳)}{a_1 q(۱+q)} = \frac{۲۸}{۱۲} = \frac{۷}{۳}$

$\Rightarrow \frac{(۱+q)(۱-q+q^۲)}{q(۱+q)} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow ۳ - ۳q + ۳q^۲ = ۷q \Rightarrow ۳q^۲ - ۱۰q + ۳ = ۰$

$\Rightarrow q \overset{\Delta}{=} \frac{-۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶}$

$q = ۳ \rightarrow a_1(۱+۳) \cdot ۳ = ۱۲ \Rightarrow a_1 = ۱$

$q = \frac{1}{۳} \rightarrow aq(۱+q) = ۱۲ \Rightarrow a_1 = ۲۷$

$q = ۳ \Rightarrow ۱, ۳, ۹, ۲۷$ / $q = \frac{1}{۳} \Rightarrow ۲۷, ۹, ۳, ۱$

۷)

$\frac{a_2}{q} \times a_2 \times a_2 q = ۲۷ \Rightarrow a_2^{۳} = ۲۷ \Rightarrow a_2 = ۳ \Rightarrow a_1 = \frac{۳}{q}$

$\rightarrow a_1 + a_2 + a_3 = ۱۳ \xrightarrow{a_2 = ۳} a_1 + a_3 = ۱۰ \Rightarrow a_1(1+q^2) = ۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{q}(1+q^2) = ۱۰$

$\Rightarrow \frac{۳}{q} + ۳q = ۱۰ \xrightarrow{\times q} ۳ + ۳q^2 - ۱۰q = ۰ \Rightarrow ۳q^2 - ۱۰q + ۳ = ۰$

$\Rightarrow q = \frac{۱۰ \pm ۸}{۶} < ۳ , \frac{1}{۳}$ ، $q = ۳ \rightarrow ۱, ۳, ۹$

$q = \frac{1}{۳} \rightarrow ۹, ۳, ۱$

۸)

الف) $S_{۱۰} = ۲\left(\frac{۳^{۱۰} - ۱}{۳ - ۱}\right) = ۵۹۰۴۸$

ب) $P_n = (a_1 \times a_n)^{n}$ یا $\rightarrow a_n$ جایگذاری $\Rightarrow P_n = a_1^{n} \times q^{\frac{n(n-1)}{۲}}$

$\Rightarrow ۲^{۱۰} \times ۳^{\frac{۱۰(۱۰-۱)}{۲}} = ۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵} \Rightarrow ۱۰۲۴ \times ۳^{۴۵}$

۹)

$A = a_1, a_1 q, aq^2, \ldots, aq^{n-1}$

$B = \rightarrow b_1 = a_2 - a_1 = aq - a \Rightarrow b_n = a_{n-1} - a_n = aq^n - aq^{n-1}$

$b_2 = a_3 - a_2 = aq^2 - aq$

$\hookrightarrow \frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} \rightarrow \frac{aq(q-1)}{a(q-1)} = q$

$\boxed{\frac{b_3}{b_2} = q}$

۱۰)

الف) $S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + ۲d) + \ldots + (a_1 + (n-1)d)$ *

نزولی $\hookrightarrow S_n = a_n + (a_n - d) + (a_n - ۲d) + \ldots + (a_1 + d) + a_1$ **

$\Rightarrow S_n = (a_1 + (n-1)d) + (a_1 + (n-۲)d) + \ldots + a_1$

$* + ** \Rightarrow ۲S_n = (۲a_1 + (n-1)d) + (۲a + (n-1)d) + \ldots$

$۲S_n = n(۲a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d)$

$\hookrightarrow$) $S_n = a_1 + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}$

$\xrightarrow{\times q}$ $aq + aq^2 + \cdots + aq^n$

$\Rightarrow qS_n - S_n = aq^n - a$

$S_n(q-1) = a(q^n - 1) \Rightarrow S_n = a\,\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$