شایان امامی　　　　تکلیف شماره ۱۴　　　　دهم تجربی B

۱-

الف)

$a_n = \frac{1}{2}, 1, 2, \dots \longrightarrow a_n = a_1 q^{n-1} \longrightarrow a_{10} = \frac{1}{2} \times 2^9 = \boxed{256}$

$q = \times 2$

ب)

$\frac{a_{17}}{a_{13}} = q^4 \xrightarrow{q=2} 2^4 = \boxed{16}$

ج)

روش ① $\sqrt{a_4 \times a_{10}} = \sqrt{\frac{1}{2}\times 2^3 \times \frac{1}{2} \times 2^9} = \boxed{32}$

روش ② $a_4 \times a_{10} = a_7^2 \longrightarrow a_7 = \frac{1}{2} \times 2^6 = \boxed{32}$

د)

$a_n = 128 = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} \longrightarrow 256 = 2^{n-1} \longrightarrow 2^8 = 2^{n-1} \longrightarrow 8 = n-1 \longrightarrow \boxed{n=9}$

۲-

$q^3 = \frac{a_8}{a_5} = \frac{96}{12} = 8 \longrightarrow q = 2$

$a_{10} = a_8 \times q^2 \longrightarrow 96 \times 4 = \boxed{384}$

۳-

$\underbrace{a_1 \times \underbrace{a_2 \times a_3 \times a_4}_{a_3^2} \times a_5}_{a_3^2} = 243$

الف)

$a_3^5 = 243 = 3^5 \longrightarrow a_3 = \boxed{3}$

ب)

$a_1 \times a_5 = a_3^2 \longrightarrow 3^2 = \boxed{9}$

۴-

$2^a \times 2^b = 2^{a+b} = (4\sqrt{2})^2 = 32 = 2^5 \longrightarrow a+b = 5$

واسطه حسابی بین a, b $= \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \boxed{2.5}$

۵-

$a_3 = 1 - x$ / $a_7 = x$ / $a_{11} = x + 1$　　　$a_3 \times a_{11} = a_7^2$

$x^2 = (1-x)(x+1) \longrightarrow x^2 = 1 - x^2 \longrightarrow 2x^2 = 1 \longrightarrow x^2 = \frac{1}{2} \longrightarrow x = \boxed{\pm \frac{1}{\sqrt{2}}}$

۶-

$a_1 + a_4 = ۲۸ \qquad a_2 + a_3 = ۱۲$

[illegible]

$$\left.\begin{array}{l} a + aq^3 = ۲۸ \rightarrow a(1+q^3) = ۲۸ \longrightarrow a(1+q)(1-q+q^2) = ۲۸ \\ aq + aq^2 = ۱۲ \rightarrow aq(1+q) = ۱۲ \longrightarrow a(1+q) = \frac{۱۲}{q} \end{array}\right\} \frac{۱۲}{q}(1-q+q^2) = ۲۸$$

$$\longrightarrow ۱۲(1-q+q^2) = ۲۸q \longrightarrow ۱۲ - ۱۲q + ۱۲q^2 = ۲۸q \longrightarrow ۱۲q^2 - ۴۰q + ۱۲ = 0 \xrightarrow{\div ۴} ۳q^2 - ۱۰q + ۳ = 0$$

$$q = \frac{-(-۱۰) \pm \sqrt{(-۱۰)^2 - ۴(۳\times۳)}}{۲\times۳} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{\overbrace{۱۰۰-۳۶}^{۶۴}}}{۶} = \begin{cases} q = ۳ \\ q = \frac{1}{۳} \end{cases}$$

با جای گذاری هر یک از q ها $\longrightarrow$ ۱, ۳, ۹, ۲۷ یا برعکس می‌رسیم $\longrightarrow$ که بزرگترین عدد در هر دو حالت $= \boxed{۲۷}$

۷-

$$\left.\begin{array}{l} a_1 \times a_2 \times a_3 = (a_2)^3 = ۲۷ \longrightarrow a_2 = ۳ \rightarrow aq = ۳ \rightarrow a = \frac{۳}{q} \\ a_1 + a_2 + a_3 = ۱۳ \rightarrow a(1+q+q^2) = ۱۳ \end{array}\right\} \frac{۳}{q}(1+q+q^2) = ۱۳$$

$$\longrightarrow ۳(1+q+q^2) = ۱۳q \longrightarrow ۳q^2 - ۱۰q + ۳ = 0$$

$$q = \frac{-(-۱۰) \pm \sqrt{(-۱۰)^2 - ۴(۳\times۳)}}{۲\times۳} = \frac{۱۰ \pm \sqrt{۶۴}}{۶} = \begin{cases} q = ۳ \xrightarrow{\text{حالت}} ۱, ۳, ۹ \\ q = \frac{1}{۳} \longrightarrow ۹, ۳, ۱ \end{cases}$$

۸-

$a_n = ۲, ۶, ۱۸, \dots \qquad q = \times ۳ \qquad S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right)$

الف) $S_{۱۰} = \cancel{۲} \times \frac{۳^{۱۰} - ۱}{\cancel{۳-۱}} = ۳^{۱۰} - ۱ = \boxed{۵۹۰۴۸}$

ب) $P = (\text{اولی} \times \text{آخری})^{\frac{n}{۲}} \longrightarrow (۲ \times ۳۹۳۶۶)^۵ = \boxed{۷۸۷۳۲^۵}$

$a_{۱۰} = ۲ \times ۳^۹ = ۳۹۳۶۶$

۹.

$a, aq, aq^۲, aq^۳, \ldots$ $a_n = a \cdot q^{n-1}$

$b_n = a_{n+1} - a_n = aq^n - aq^{n-1} \longrightarrow b_n = a \cdot q^{n-1}(q-1)$

(دنباله جدید)

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\cancel{a}q^n \cancel{(q-1)}}{\cancel{a}q^{n-1}\cancel{(q-1)}} = q \xrightarrow{\text{بنابراین}}$ دنباله b_n یک دنباله هندسی با قدر نسبت $\boxed{q(q-1)}$ است

---

۱۰. حسابی

الف) $S_n = \frac{n}{۲}(۲a+(n-1)d) \xrightarrow{\text{اثبات}} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_٤ + a_۵ + \cdots + a_n$

$S = a + (a+d) + (a+۲d) + (a+۳d) + (a+٤d) + \cdots + (a+(n-1)d)$

$S = na + d(۱+۲+۳+٤+\cdots+n-1)$

$S = na + \frac{d(n-1)n}{۲} = \frac{n}{۲}(۲a+(n-1)d)$

ب) هندسی

$S_n = a\left(\frac{q^n-1}{q-1}\right) = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right) \xrightarrow{\text{اثبات}} a_۱ + a_۲ + a_۳ + a_٤ + a_۵ + \cdots + a_n$

$S = a + \cancel{aq} + \cancel{aq^۲} + \cancel{aq^۳} + \cancel{aq^٤} + \cdots + \cancel{aq^{n-1}}$

$\times q$ $qS = \cancel{aq} + \cancel{aq^۲} + \cancel{aq^۳} + \cancel{aq^٤} + \cancel{aq^۵} \cdots + aq^n$

$-$

$S - qS = a - aq^n \longrightarrow S(1-q) = a(1-q^n)$

$S = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$