①

$a_n = a q^{n-۱} \to q=۲$　　$a=\frac{۱}{۲} \to \frac{۲^{n-۱}}{۲} \to ۲^{n-۲}$

الف) $\frac{۲^{۱۰-۱}}{۲} \to \frac{۲^{۹}}{۲} = ۲^{۸}$

ب) $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} = q^{۱۷-۱۳} \to q^{۴} \to ۲^{۴}=۱۶$

ج) $q^{n-۱} = \frac{b}{a} \to \frac{aq^{۹}}{aq^{۳}} = q^{n-۱} \to q^{n-۱} = q^{۶}$　$۶=n-۱ \to n=۷$

$a_{۷} = ۲^{۷-۲} \to ۲^{۵} = ۳۲$

د) $۲^{n-۲} = ۱۲۸ \to ۲^{n-۲} = ۲^{۷} \to n=۹$

②

$a_{۵}=۱۲ \to aq^{۴}$
$a_{۸}=۹۶ \to aq^{۷}$

$\frac{a_{۸}}{a_{۵}} = q^{۸-۵} \to q^{۳} = \frac{۹۶}{۱۲} \to q^{۳}=۸ \to q=۲$

$aq^{۴}=۱۲ \to a\times ۲^{۴}=۱۲ \to ۱۶a=۱۲ \to a=\frac{۳}{۴}$

$a_{۱۰} = aq^{۹} \to \frac{۳}{۴}\times ۲^{۹} \to ۳\times ۲^{۷} = ۳۸۴$

③

$\underbrace{a_{۱}a_{۲}a_{۳}a_{۴}a_{۵}}_{a_{۳}^{۲}} = ۲۴۳ \to a_{۳}^{۲}a_{۳}^{۲}a_{۳} \to a_{۳}^{۵} = ۲۴۳$　　$\sqrt[۵]{۲۴۳} = ۳$

$a_{۳}=۳$

الف) $a_{۳}=۳$

ب) $a_{۱}a_{۵} = a_{۳}^{۲} \to ۳^{۲}=۹$

④

$(۴\sqrt{۲})^{۲} = ۲^{a+b} \to ۳۲ = ۲^{a+b} \to ۲^{۵} = ۲^{a+b} \to a+b=۵$

واسطه حسابی $\to \frac{a+b}{۲} \to \frac{۵}{۲}$

⑤

$aq^{۲}=۱-x$
$aq^{۶}=x \to$ واسطه هندسی $a_{۳}$ و $a_{۱۱}$
$aq^{۱۰}=x+۱$

$x^{۲} = (۱-x)(۱+x) \to ۱-x^{۲}=x^{۲} \to ۲x^{۲}=۱ \to x^{۲}=\frac{۱}{۲} \to x=\frac{۱}{\sqrt{۲}} \xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}} \frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۶)

$a + aq^3 = 28 \longrightarrow a(1+q^3)$
$aq + aq^2 = 12 \longrightarrow a(q^2+q)$
$\Big\}\quad \frac{28}{12} = \frac{1+q^3}{q^2+q} \longrightarrow \frac{1+q^3}{q(q+1)}$

$\longrightarrow 12 + 12q^3 = 28q + 28q^2$

$12q^3 - 28q^2 - 28q + 12 = 0 \longrightarrow 4(3q^3 - 7q^2 - 7q + 3) = 0 \longrightarrow 3q^3 - 7q^2 - 7q + 3 = 0$

$\longrightarrow a(1+q^3) = 28 \begin{cases} q=3 & a=1 \\ q=\frac{1}{3} & a=27 \end{cases}$

$1, 3, 9, 27 \qquad 27, 9, 3, 1 \longrightarrow$ ۲۷ صحیح

---

۷)

$a_1 + a_2 + a_3 = 13 \longrightarrow a + aq + aq^2$

$a_1 . a_2 . a_3 = 27 \longrightarrow a^3 q^3 = 27 \longrightarrow aq = \sqrt[3]{27} \longrightarrow aq = 3$ (a فرض کنیم)

$\hookrightarrow a_1 a_3 = \frac{27}{3} \Rightarrow 9 = a_1 a_3$

$\frac{3}{q} + 3q = 13 - 3 \to 10 \longrightarrow 3(q + \frac{1}{q}) = 10 \longrightarrow q + \frac{1}{q} = \frac{10}{3} \longrightarrow \frac{q^2+1}{q} = \frac{10}{3} \longrightarrow 3q^2 + 3 = 10q$

$\longrightarrow 3q^2 + 3 - 10q = 0 \longrightarrow q^2 - 10q + 9 = 0 \longrightarrow (q-1)(q-9) = 0$ [crossed out] $\xrightarrow{\div 3} \frac{1}{3}, 3$

$9\ 3\ 1$
$1, 3, 9$
هر دو حالت درست

---

۸)

$a_n = 2, 6, 18, \ldots \qquad a_1 = 2 \quad q = 3$

الف) $S_{10} = a_1\left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) \longrightarrow 2\left(\frac{3^{10}-1}{2}\right) \Rightarrow 3^{10} - 1$

ب) $P_{10} = (\text{اولی} \times \text{آخری})^{\frac{n}{2}} \longrightarrow (2 \times 3^9 \times 2)^5 \longrightarrow (4 \times 3^9)^5$

$a_{10} \to 2(3)^{10-1} \longrightarrow 2 \times 3^9$

---

۹)

[crossed out]

$a_n = aq^{n-1}$

$d_n = a_{n+1} - a$

$d_n = aq^n - aq^{n-1} \longrightarrow a(q-1)q^{n-1}$

$\frac{d_{n+1}}{d_n} \longrightarrow \frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)(q^{n-1})} = q$

اگر $q = 1 \longrightarrow d_n = 0$

---

۱۰)

الف) $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d) \,/\, \frac{n}{2}(a_n + a_1)$

$(a) + (a+d) + (a+2d) + \cdots + (a+(n-1)d) \longrightarrow na + (d + 2d + \cdots + (n-1)d)$

$d(1 + 2 + \cdots + (n-1)) \longrightarrow d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \Rightarrow an + d\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)$

$\longrightarrow \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$ ☑

ب) $S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$(a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1}) \xrightarrow{\times q} aq + aq^2 + \cdots + aq^n$

$S_n - qS_n = a - aq^n \longrightarrow S_n(1-q) \longrightarrow S_n = a\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$ ☑