تکلیف شماره ۱۳ / دهم دفتر B

شقایق امامی

۱-

$t_1 = ٤٠ \quad t_٤ = ٦١ \quad t_n = ٢٠٨ \to n = ?$

$d = \frac{t_٤ - t_1}{٤-1} \to \frac{٦١-٤٠}{٣} = ٧ \qquad t_n \Rightarrow ٧n + ٣٣ = ٢٠٨ \longrightarrow n = ٢٥$

۲-

$t_n = ٧n + ٣$

$٧n + ٣ > ٩٩ \longrightarrow n > ١٣,... \qquad n \geq ١٤$

$٧n + ٣ < ١٠٠٠ \longrightarrow n < ١٤٢,... \qquad n \leq ١٤٢$

$١٤ \leq n \leq ١٤٢ \xrightarrow{\text{تعداد}} (١٤٢ - ١٤) + ١ = ١٢٩$

۳-

$a_{n+1} + a_{n+٢} + a_{n+٣} = -٦n + ١٢ \qquad a_{١٧} + a_٨ = ?$

if $n=1 \longrightarrow a_٢ + a_٣ + a_٤ = ٦ \xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} ٢a_٣ = a_٢ + a_٤ \longrightarrow ٣a_٣ = ٦ \longrightarrow a_٣ = ٢$

if $n=٢ \longrightarrow a_٣ + a_٤ + a_٥ = ٠ \longrightarrow ٢a_٤ = a_٣ + a_٥ \longrightarrow ٣a_٤ = ٠ \longrightarrow a_٤ = ٠$

$d = -٢$

$a_n = -٢n + ٨ \longrightarrow a_{١٧} + a_٨ = \underbrace{(-٢(١٧)+٨)}_{-٢٦} + \underbrace{(-٢(٨)+٨)}_{-٨} = -٣٤$

٤-

$t_٣ = ٢^x - 1 \ , \ t_٨ = ٢^{x+1} \ , \ t_{١٣} = ٢^{٢x} - ٣ \qquad t_٣ + t_٨ + t_{١٣} = ?$

طبق واسطه حسابی $= t_٣ + t_{١٣} = ٢t_٨ \longrightarrow ٢^x - 1 + ٢^{٢x} - ٣ = ٢ \times ٢^{x+1} \longrightarrow ٢^x + ٢^{٢x} - ٢^٢ = ٢^{x+٢}$

$\longrightarrow ٢^x + ٢^{٢x} - ٢^{x+٢} - ٢^٢ = ٠ \xrightarrow{\text{if } ٢^x = y} y + y^٢ - ٤y - ٤ = ٠ \longrightarrow y^٢ - ٣y - ٤ = ٠$ (معادله درجه ۲)

چون در این معادله درجه دو $a + c = b$ است $\longrightarrow y = -1$ یا $y = -\frac{c}{a} = ٤$

چون y برابر ٢^x قرار دادیم $\longrightarrow ٢^x = -1$ ✗

$\longrightarrow ٢^x = ٤ \longrightarrow x = ٢$

$٢^x - 1 = ٣$

$٢^{x+1} = ٨$

$٢^{٢x} - ٣ = ١٣$

$\longrightarrow t_٣ + t_٨ + t_{١٣} = ٣ + ٨ + ١٣ = ٢٤$

۵-

روش اول:

$\text{عدد کوچک} = \frac{\text{مجموع} - \text{تفاضل}}{٢}$ / $\text{عدد بزرگ} = \frac{\text{مجموع} + \text{تفاضل}}{٢}$ ⟵ اگر مجموع و تفاضل دو عدد را داشتیم

$t_{١٢} - t_{١٠} = ٥$

$t_{١٢} + t_{١٠} = ٢٥$

$t_{١٢} = \frac{٢٥+٥}{٢} = ١٥ \ , \ t_{١٠} = \frac{٢٥-٥}{٢} = ١٠ \qquad d = \frac{١٥-١٠}{٢} = ٢,٥$

$t_n = ٢,٥n - ١٥ \longrightarrow t_{٢١} = ٢,٥(٢١) - ١٥ = ٣٧,٥$

روش دوم:

$t_{۱۲} - t_{۱۰} = ۵ \longrightarrow t_۱ + ۱۱d - t_۱ - ۹d = ۵ \longrightarrow ۲d = ۵ \longrightarrow d = ۲/۵$

$t_{۱۲} + t_{۱۰} = ۱۵ \longrightarrow t_۱ + ۱۱d + t_۱ + ۹d = ۲t_۱ + \underbrace{۲۰d}_{۵۰} = ۱۵ \longrightarrow t_۱ = -۱۲/۵$

$t_{۲۱} = t_۱ + (۲۱-۱)d \longrightarrow -۱۲/۵ + (۲۰ \times ۲/۵) = \boxed{۳۷/۵}$

۶-

$۲ : \left(\frac{۵}{۲}(t_۱ + t_۵)\right) = \frac{۷}{۲}(t_۵ + t_{۱۰}) \longrightarrow ۲t_۱ + ۲t_۵ = t_۵ + t_{۱۰} \longrightarrow ۲t_۱ + ۲t_۵ = t_{۱۰}$

$۲t_۱ + ۲t_۱ + ۸d = t_۱ + ۹d \longrightarrow ۴t_۱ = d$

$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{t_۱ + \overbrace{d}^{۴t_۱}}{t_۱} = \boxed{۵}$ بنابر

۷-

$t_n = t_{n-۲} + ۱۵$ $\qquad \frac{t_۹^۲ - t_۵^۲}{t_۷} = ?$

۸-

$d = \frac{۲ + \sqrt{۳} - (۲ - ۱۲\sqrt{۳})}{۱۲ + ۱} \rightarrow \frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۳} = \boxed{\sqrt{۳}}$

۹-

$۲ \xrightarrow{۹} ۱۱ \xrightarrow{۲۱} ۳۲$ $\qquad n-۱ \longleftarrow$ تعداد واسطه بین ۲ و ۱۱ (واسطه n تا)

$d = \frac{۳۲-۲}{۴n-۳+۱} = \frac{۳۰}{۴n-۲}$ $\qquad d = \frac{۱۱-۲}{n-۱+۱} = \frac{۹}{n}$ $\qquad \frac{۳۰}{۴n-۲} = \frac{۹}{n} \longrightarrow ۳۰n = ۳۶n - ۱۸$

$۶n = ۱۸ \longrightarrow \boxed{n = ۳}$

۱۰-

$t_۸ + t_{n+۴} = t_۲ + t_{۱۷} \longrightarrow n + n + ۴ = ۲ + ۱۷ \longrightarrow ۲n = ۱۶ \longrightarrow n = ۸$

$t_۸ = ۲(t_۴)$ $\qquad d = \frac{\overbrace{۲t_۴}^{}}{t_۸ - t_۴} = \frac{۲t_۴}{۸-۴} = \frac{t_۴}{۲}$ یعنی ← نصف جمله چهارم = قدرت

پس یعنی اگر دو جمله از $t_۴$ به عقب بریم صفری شود

$t_۲ = ۰$ ← جمله دوم این دنباله صفر است