شقایق امامی

تکلیف شماره ۱۳ / دهم دختر B

۱۷٫۲۵

۱-

$t_1 = ۴۰ \quad t_۴ = ۶۱ \quad t_n = ۲۰۸ \rightarrow n = ?$

$d = \frac{t_۴ - t_1}{۴-۱} \rightarrow \frac{۶۱-۴۰}{۳} = ۷ \qquad t_n \Rightarrow ۷n + ۳۳ = ۲۰۸ \longrightarrow \boxed{n = ۲۵}$

۲

۲-

$t_n = ۷n + ۳$

$۷n + ۳ > ۹۹ \longrightarrow n > ۱۳٫... \qquad n \geq ۱۴$

$۷n + ۳ < ۱۰۰۰ \longrightarrow n < ۱۴۲٫... \qquad n \leq ۱۴۲$

$۱۴ \leq n \leq ۱۴۲ \xrightarrow{\text{تعداد}} (۱۴۲-۱۴)+۱ = \boxed{۱۲۹ \text{ ت}}$

۲

۳-

$a_{n+1} + a_{n+۲} + a_{n+۳} = -۶n + ۱۲ \qquad a_{۱۷} + a_۸ = ?$

۲

if $n=۱ \longrightarrow a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۶ \xrightarrow{\text{واسطه حسابی}} ۲a_۳ = a_۲ + a_۴ \longrightarrow ۳a_۳ = ۶ \longrightarrow a_۳ = ۲$

if $n=۲ \longrightarrow a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۰ \longrightarrow ۲a_۴ = a_۳ + a_۵ \longrightarrow ۳a_۴ = ۰ \longrightarrow a_۴ = ۰$

$d = -۲$

$a_n = -۲n + ۸ \longrightarrow a_{۱۷} + a_۸ = \underbrace{(-۲(۱۷)+۸)}_{-۲۶} + \underbrace{(-۲(۸)+۸)}_{-۸} = \boxed{-۳۴}$

۴-

$t_۳ = ۲^x - ۱ \quad , \quad t_۸ = ۲^{x+1} \quad , \quad t_{۱۳} = ۲^{۲x} - ۳ \qquad t_۳ + t_۸ + t_{۱۳} = ?$

۲

طبق واسطه حسابی $= t_۳ + t_{۱۳} = ۲t_۸ \longrightarrow ۲^x - ۱ + ۲^{۲x} - ۳ = ۲ \times ۲^{x+1} \longrightarrow ۲^x + ۲^{۲x} - ۲^۲ = ۲^{x+۲}$

$\longrightarrow ۲^x + ۲^{۲x} - ۲^{x+۲} - ۲^۲ = ۰ \xrightarrow{\text{if } ۲^x = y} y + y^۲ - ۴y - ۴ = ۰ \longrightarrow y^۲ - ۳y - ۴ = ۰$ معادله درجه ۲

چون در این معادله درجه دو $a + c = b$ است $\longrightarrow y = -۱$ یا $y = -\frac{c}{a} = ۴$

چون y برابر ۲^x قرار دادیم $\longrightarrow ۲^x = -۱$ ✗

$\longrightarrow ۲^x = ۴ \longrightarrow x = ۲ \quad \begin{cases} ۲^x - ۱ = ۳ \\ ۲^{x+1} = ۸ \\ ۲^{۲x} - ۳ = ۱۳ \end{cases} \longrightarrow t_۳ + t_۸ + t_{۱۳} = ۳ + ۸ + ۱۳ = \boxed{۲۴}$

۵-

روش اول:

اگر مجموع و تفاضل دو عدد را داشتیم $\longrightarrow$ عدد بزرگ $= \frac{\text{تفاضل} + \text{مجموع}}{۲}$ / عدد کوچک $= \frac{\text{تفاضل} - \text{مجموع}}{۲}$

۲

$\begin{cases} t_{۱۲} - t_{۱۰} = ۵ \\ t_{۱۲} + t_{۱۰} = ۲۵ \end{cases} \quad t_{۱۲} = \frac{۲۵+۵}{۲} = ۱۵ \quad , \quad t_{۱۰} = \frac{۲۵-۵}{۲} = ۱۰ \qquad d = \frac{۱۵-۱۰}{۲} = ۲٫۵$

$t_n = ۲٫۵n - ۱۵ \longrightarrow t_{۲۱} = ۲٫۵(۲۱) - ۱۵ = \boxed{۳۷٫۵}$

روش دوم:

$t_{12} - t_{10} = 5 \longrightarrow t_1 + 11d - t_1 - 9d = 5 \longrightarrow 2d = 5 \longrightarrow d = 2.5$

$t_{12} + t_{10} = 15 \longrightarrow t_1 + 11d + t_1 + 9d = 2t_1 + \underbrace{20d}_{50} = 15 \longrightarrow t_1 = -12.5$

$t_{21} = t_1 + (21-1)d \longrightarrow -12.5 + (20 \times 2.5) = \boxed{37.5}$

---

۶. ۱٫۲۵

$3\left(\frac{5}{2}(t_1 + t_5)\right) = \frac{5}{2}(t_5 + t_{10}) \longrightarrow 3t_1 + 3t_5 = t_5 + t_{10} \longrightarrow 3t_1 + 2t_5 = t_{10}$

$3t_1 + 2t_1 + 8d = t_1 + 9d \longrightarrow 4t_1 = d$

$\frac{t_2}{t_1} = \frac{t_1 + \overset{4t_1}{d}}{t_1} = \boxed{5}$ برابر

راه حل پایین صفحه نوشته شد

---

۷. ۵

$t_n = t_{n-3} + 15 \qquad \frac{t_9^2 - t_5^2}{t_7} = ?$

$t_9^2 - t_5^2 = (t_9 - t_5)(t_9 + t_5)$

$t_9 + t_5 = t_7 + t_7 = 2t_7 \longrightarrow \frac{2t_7(t_9 - t_5)}{t_7} = 2(t_9 - t_5)$

$t_9 - t_5 = t_1 + 8d - t_1 - 4d = 4d \longrightarrow 8d$

$n = 4 \rightarrow t_4 = t_1 + 15 \rightarrow t_1 + 3d = t_1 + 15 \rightarrow d = 5$

$8d = 8(5) = \underline{40}$

---

۸. ۲

$d = \frac{2 + \sqrt{3} - (2 - 12\sqrt{3})}{12 + 1} \rightarrow \frac{13\sqrt{3}}{13} = \boxed{\sqrt{3}}$

---

۹. ۲

$2 \xrightarrow{9} 11 \xrightarrow{21} 32$

تعداد واسطه بین ۲ و ۱۱ (واسطه‌ها n) $\longrightarrow n-1$

$d = \frac{32 - 2}{4n - 3 + 1} = \frac{30}{4n - 2} \qquad d = \frac{11 - 2}{n - 1 + 1} = \frac{9}{n}$

$\frac{30}{4n - 2} = \frac{9}{n} \longrightarrow 30n = 36n - 18$

$6n = 18 \longrightarrow \boxed{n = 3}$

---

۱۰. ۲

$t_n + t_{n+4} = t_3 + t_{17} \longrightarrow n + n + 4 = 3 + 17 \longrightarrow 2n = 16 \longrightarrow n = 8$

$t_8 = 3(t_4) \qquad d = \frac{\overset{3t_4}{t_8} - t_4}{8 - 4} = \frac{2t_4}{4} = \frac{t_4}{2}$ یعنی نصف جملهٔ چهارم = قدر نسبت $\longrightarrow$ پس یعنی اگر دو جمله از t_4 به عقب برگردیم صفری شود

$t_2 = 0 \longleftarrow$ $\boxed{\text{جملهٔ دوم این دنباله صفر است}}$

سوال ۶

مجموع ۵ جمله اول

$$\underbrace{a_1 + \overbrace{a_2 + a_3 + a_4}^{2a_3} + a_5}_{2a_3} = 5a_3$$

مجموع ۵ جمله دوم

$$\underbrace{a_6 + \overbrace{a_7 + a_8 + a_9}^{2a_8} + a_{10}}_{2a_8} = 5a_8$$

$$3 \times 5a_3 = 5a_8 \longrightarrow 3a_3 = a_8 \qquad \frac{a_2}{a_1} = \frac{3a_1}{a_1} = 3$$

$$3(a_1 + 2d) = a_1 + 7d \longrightarrow 2a_1 = d$$