۱-

الف) $f(x)=\sqrt{x|x|}$ ، $g(x)=x$

$D_f=\mathbb{R}^+\cup\{0\}$ ، $D_g=\mathbb{R}$ → (∝)

ب) $f(x)=\frac{(x+3)(x+1)+x+4}{x^2+5x+7}$ ، $g(x)=1$

$\Delta<0$ ریشه ندارد. چون x^2+5x+7

$D_f=\mathbb{R}$

$\frac{x^2+4x+3+x+4}{x^2+5x+7}=\frac{x^2+5x+7}{x^2+5x+7}=1$

ضابطه‌ها یکسان عمل می‌کنند ✓

ج) $f(x)=\frac{4\sin^2x-4\sin x}{2\sin x-3}$ ، $g(x)=2\sin x$

$\frac{2\sin x(2\sin x-3)}{2\sin x-3}$ ، مخرج صفر نشود: چون $\sin x\neq\frac{3}{2}$ ، $x\neq 0$ — این شرط همیشه برقرار.

ضابطه‌ها یکسان عمل می‌کنند ✓

$\to D_f=D_g=\mathbb{R}$

د) $f(x)=\frac{x}{|x|}$ ، $g(x)=\frac{|x|}{x}$

$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$ $D_g=\mathbb{R}-\{0\}$

۲-

الف) $f(x)=\left[\frac{x^2}{x^2+1}\right]$ ، $g(x)=[x-[x]]$ $g(x)=0\to$

$D_f=\mathbb{R}$ $D_g=\mathbb{R}$ $\to f(x)=0\to$ ✓

ب) $f(x)=\frac{1}{[2x]}$ ، $g(x)=\frac{1}{2[x]}$ ، $D_g=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

$D_f=(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$

اما اگر $x=\frac{1}{2}$ باشد:

$f(x)=1$ ، $g(x)=\frac{1}{0}=$ تعریف نشده → (∝)

ج) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x-|x|}}$ ، $g(x)=\frac{1}{\sqrt{|x|-x}}$ $\Rightarrow D_f\neq D_g$ → (∝)

$D_f=\mathbb{R}^+$ چون $x-|x|>0\to x>|x|$ $|x|-x\geq 0\to|x|\geq x\to D_g=\mathbb{R}$

د) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-x}{x-1} & ;x\neq 1\\ 2 & ;x=1\end{cases}$ ، $g(x)=x^2+x$

$D_f=\mathbb{R}$ ، $D_g=\mathbb{R}$

$\to\frac{x^3-x}{x-1}=\frac{x(x^2-1)}{x-1}=\frac{x(x-1)(x+1)}{x-1}=x^2+x$ → ✓

۳-

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=x^2+x+1 \\ f(x)-g(x)=x^2-x+1 \end{cases}$$

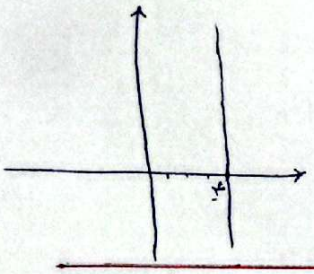
$$\oplus \quad 2f(x)=2x^2+2 \Rightarrow f(x)=x^2+1 \quad , \quad g(x)=x$$

$$\rightarrow f^2(x)-g^2(x)=(x^2+1)^2-x^2=x^4+2x^2+1-x^2=x^4+x^2+1$$

۴-

$$D_f: ? \rightarrow x^2-4\geq 0 \rightarrow x^2\geq 4 \rightarrow \begin{matrix} x\geq 2 \\ x\leq -2 \end{matrix} \rightarrow D_f=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)=D_g$$

$$\rightarrow f\times g=(x-\sqrt{x^2-4})(x+\sqrt{x^2-4})=x^2-(\sqrt{x^2-4})^2=x^2-(x^2-4)=4$$



۵-

$$\rightarrow 2x^2-3x-5=0 \xrightarrow{\text{روش دلتا}} x=\frac{-(-3)\pm\sqrt{(-3)^2-4(2)(-5)}}{2(2)} \rightarrow \begin{matrix} x=\frac{5}{2} \\ x=-1 \end{matrix} \rightarrow g(x)=\frac{x-b}{(2x-5)(x+1)}$$

$$\rightarrow x^2-mx+n \begin{matrix} =(2x-\frac{5}{2})(x+1) \\ =k(x-\frac{5}{2})(x+1) \end{matrix} \text{ ضرب} \rightarrow x^2-mx+n=(2x^2-3x-5)k \rightarrow k=\frac{1}{2}$$

(ضرب ثابت)

$$\rightarrow ax+2=k(x-b) \rightarrow =\frac{1}{2}x-\frac{b}{2} \quad , \quad x^2-mx+n=x^2-\frac{3}{2}x-\frac{5}{2} \rightarrow m=\frac{3}{2},\ n=-\frac{5}{2}$$

$$am-bn=\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)-(-4)\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{37}{4}$$

۶-

$$D_g=D_f \rightarrow D_f=R-\{a\} \qquad ax+b=0 \rightarrow x=\frac{-b}{a} \rightarrow a=\frac{-b}{a} \rightarrow -b=a^2$$

ضریب x در صورت $\rightarrow b$

در مخرج $\rightarrow a$ $\rightarrow$ نقطه‌ی شکستگی $= c=\frac{b}{a} \rightarrow \frac{ab}{c}=\frac{ab}{\frac{b}{a}}=ab\times\frac{a}{b}=a^2=-b$

-۷

$\to f_{(x)} = \{(-1,۲),(۲,۴),(۳,-۲),(\circ,\frac{1}{۲})\}$ $\nearrow$ $۲g = \{(۲,۸),(۳,۱۲),(-1,-۸),(۵,\circ)\}$

$g_{(x)} = \{(۲,۴),(۳,۶),(-1,-۴),(۵,\circ)\}$ $\searrow$ $f+g = \{(۲,۸),(۳,۴),(-1,-۲)\}$

چون دامنه مشترک $\rightarrow$ $\frac{۲g}{f+g} = \{(۲,\frac{۸}{۸}),(۳,\frac{۱۲}{۴}),(-1,\frac{-۸}{-۲})\} = \{(۲,1),(۳,۳),(-1,۴)\}$

-۸

$\to a = d = -1$

$\to ۳a - ۲b = +1 \to ۳(-1) - ۲b = 1 \to b = -۲$ $\Rightarrow d + c = -1 + ۵ = ۴$ ✓

$\to a - ۳b = (-1) - ۳(-۲) = -1 + ۶ = ۵ = c$

-۹

$\to x^۲ - x + m \leq \circ$ $\xrightarrow{\text{چون فقط یک نقطه است، باید یک ریشه داشته باشد.}}$ $\Delta = \circ \to b^۲ - ۴ac = \circ \to a = 1, b = -1, c = m \to 1 - ۴m = \circ \to m = \frac{1}{۴}$

$\Rightarrow x^۲ - x + \frac{1}{۴} \leq \circ \to (x - \frac{1}{۲})^۲ \leq \circ \Rightarrow (x - \frac{1}{۲})^۲ = \circ \to x = \frac{1}{۲} \to D_f = \{\frac{1}{۲}\}$

$\xrightarrow[f_{(\frac{1}{۲})}]{\text{مقدار تابع}}$ $f_{(\frac{1}{۲})} = \sqrt{-(\frac{1}{۲})^۲ + \frac{1}{۲} - \frac{1}{۴}} = \sqrt{\circ} = \circ$ $\Rightarrow f_{(x)} = \{(\frac{1}{۲},\circ)\} = \{(a,b)\} \to a = \frac{1}{۲}, b = \circ \to a + b = \frac{1}{۲}$

-۱۰

$\frac{۲x + a}{x^۲ + ۶x + b} = \frac{۲}{x - c} \to ۲x + a = ۲ \times (\dots)$

$x^۲ + ۶x + b = (x - c) \times (\dots)$

$\to \frac{۲(x-c)}{(x-c)(x+k)} = \frac{۲}{x-c} \to (۲x + a)(x - c) = ۲(x^۲ + ۶x + b)$

$۲x^۲ - ۲cx + ax - ac = ۲x^۲ + ۱۲x + ۲b$

$۲x^۲ + (a - ۲c)x - ac = ۲x^۲ + ۱۲x + ۲b$

$\to a - ۲c = ۱۲$

$-ac = ۲b$

$\xrightarrow{\text{چون}} x - c = \circ \to x = c \to x^۲ + ۶x + b = \circ \to \Delta = \circ$

$(x-c)^۲ = x^۲ - ۲cx + c^۲ \to -۲c = ۶ \to c = -۳$

$b = c^۲ \to b = ۹$

$a - ۲c = ۱۲ \to a + ۶ = ۱۲$

$a = ۶$

$\Rightarrow a + b + c = ۶ + ۹ - ۳ = ۱۲$