

۱۴, ۹, ۲.

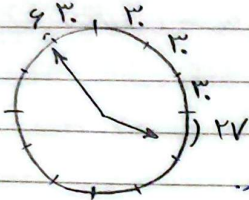
۲۰

به نام خدا»

پریا کل جتئی

۱) زاویه بین عقربه های ساعت را در ساعت ۳:۵۴:

(الف) به کمک رسم شکل ساعت، بدست آورید. (زاویه را کمتر از ۱۸۰ درجه اعلام کنید.)



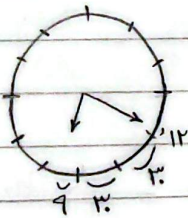
$$\frac{54}{2} = 27 \rightarrow 3 \times 30 + 27 + 6 = 153^\circ$$

(ب) از فرمول محاسبه زاویه بین عقربه های ساعت کمک بگیرید و مقدار زاویه را بدست آورید.

$$\alpha = |5.5m - 3.h| \rightarrow \alpha = |5.5 \times 54 - 3 \times 3| = 2.7^\circ \rightarrow 360^\circ - \alpha = 360^\circ - 2.7^\circ = 153^\circ$$

۲) زاویه های بین عقربه های ساعت را در ساعت ۹:۱۸:

(الف) به کمک رسم شکل، ساعت را بدست آورید.

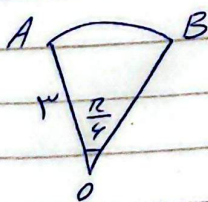


$$\frac{18}{2} = 9 \quad \alpha = 2 \times 30 + 12 + 9 = 11^\circ$$

(ب) از فرمول محاسبه زاویه بین عقربه های ساعت کمک بگیرید و مقدار زاویه را بدست آورید.

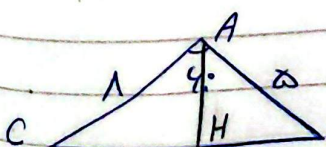
$$\alpha = |5.5 \times 18 - 3 \times 9| = 11^\circ$$

۳) با توجه به شکل مقابل اگر زاویه α حاصل $\frac{\pi}{6}$ رادیان و شعاع قطاع برابر ۳cm باشد:



$$\begin{aligned} \text{(الف) مساحت قطاع را بدست آورید.} \quad S &= \frac{\alpha}{2} r^2 = \frac{\pi}{6} \times 9 = \frac{3\pi}{2} \\ \text{(ب) محیط قطاع را بدست آورید.} \quad \text{محیط} &= \alpha r + 2r = \frac{\pi}{6} \times 3 + 2 \times 3 = 4 + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

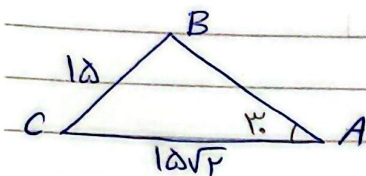
۴) مثلث مقابل را در نظر بگیرید و به سوالات زیر پاسخ دهید.



$$\begin{aligned} \text{(الف) مساحت مثلث ABC را بیابید.} \quad S &= \frac{1}{2} \times 5 \times 1 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{4} \\ \text{(ب) محیط مثلث ABC را بیابید.} \quad \alpha + \Lambda + V &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

$$BC^2 = 1^2 + 5^2 - 2 \times 1 \times 5 \times \frac{1}{2} = 4 + 25 - 5 = 24 \rightarrow BC = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

۵) در مثل ABC اگر $\hat{B} + \hat{C} = 150^\circ$ و طول ضلع AC برابر $15\sqrt{2}$ و طول ضلع BC برابر ۱۵ باشد، زاویه های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را بر حسب رادیان بدست آورید. ($\hat{B}$ حاد است.)



$$\frac{1}{15} = \frac{\sin \hat{B}}{15\sqrt{2}} \rightarrow \sin \hat{B} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \hat{B} = 45^\circ = \frac{\pi}{4}$$

$$\hat{C} = 150^\circ - 45^\circ = 105^\circ = \frac{7\pi}{12}$$

۶) حاصل عبارت $\frac{\tan(\pi - \alpha) + 2\tan(\pi + \alpha)}{\tan(\pi - \alpha) - \tan(\pi + \alpha)}$ را بدست آورید.

$$\frac{-\tan \alpha + 2\tan \alpha}{-\tan \alpha - (-\tan \alpha)} = \frac{2\tan \alpha}{0} = \boxed{-1}$$

۷) اگر $\tan 15^\circ = \alpha$ باشد، حاصل عبارت $A = \frac{2\tan 45^\circ + \tan 105^\circ}{2\tan 15^\circ - \tan 105^\circ}$ را بر حسب α بدست آورید.

$$A = \frac{2\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}) + \tan(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12})}{2\tan(\pi - \frac{\pi}{12}) - \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12})} = \frac{2\cot \frac{\pi}{12} - \cot \frac{\pi}{12}}{-2\tan \frac{\pi}{12} - \cot \frac{\pi}{12}} = \frac{2 \times \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}}{-2\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{\frac{1}{\alpha}}{\frac{-2\alpha^2 - 1}{\alpha}} = \frac{1}{-2\alpha^2 - 1}$$

۸) اگر $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} + \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} = 3$ باشد، حاصل $\tan^2 \alpha$ را بیابید.

$$\frac{1 + 2\sin \alpha \cos \alpha + 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} = 3 \rightarrow 2 = \frac{2(1 - \sin^2 \alpha)}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \rightarrow 2 = \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \rightarrow 2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = 2\cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha$$

$$\rightarrow 2 = \frac{2\cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha} \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{2}{3} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{3} \rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \boxed{2}$$

۹) اگر $\frac{\sin^2 \alpha - 2\cos^2 \alpha + 1}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = 4$ باشد، حاصل $\tan^2 \alpha$ را بیابید.

$$\frac{1 - 2\cos^2 \alpha + 1}{1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + 2\cos^2 \alpha - 1} = 4 \rightarrow \frac{2 - 2\cos^2 \alpha}{2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = 4 \rightarrow 2\cos^2 \alpha = 4(2\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) \rightarrow 2\cos^2 \alpha = 8\cos^2 \alpha - 4\sin^2 \alpha \rightarrow 4\sin^2 \alpha = 6\cos^2 \alpha \rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{3}{2}\cos^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{3}{2}\cos^2 \alpha \rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{\frac{3}{2}\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{3}{2} = \boxed{1.5}$$

۱۰) حاصل عبارت های زیر را بدست آورید.

الف) $\cos(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\cos^2(22,5^\circ) = \frac{1 + \cos 45^\circ}{2} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \rightarrow \cos(22,5^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

ب) $\sin(47,5^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ $\sin^2(47,5^\circ) = \frac{1 - \cos 95^\circ}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \rightarrow \sin(47,5^\circ) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$