

۱۴۴, ۹, ۶

به نام خدا

پریا گل محمدی

۱) اعداد طبیعی متوالی را به هر طریقی دسته بندی می کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته ۹م داریم حسابی بین دو عدد اول و آخر؟

$$\{45, 46, \dots, 81\} \rightarrow \frac{146}{2} = \frac{81+45}{2} = 73$$

۲) اعداد طبیعی طوری دسته بندی شده اند که در هر دسته کوچکترین عضو، $\frac{1}{3}$ برابر بزرگترین عضو دسته است. میانگین اعضای دسته پنجم را بیابید.

$$\{1, 2, 3\} \{4, \dots, 12\} \{13, \dots, 29\} \{30, \dots, 48\} \{49, \dots, 72\} \rightarrow \frac{363+121}{2} = 242$$

۳) دنباله $a_n = \begin{cases} 2^k & ; n=3k \\ -2k+4 & ; n=3k+1 \\ [\frac{n}{3}] + a & ; n=3k+2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله ۹ باشد حاصل عبارت $a_1 + a_4 + a_7 + \dots + a_{29}$ را بیابید.

$$\begin{aligned} n=0 \rightarrow 1 & \quad n=1 \rightarrow 4 & \quad n=2 \rightarrow 1+a \\ 1+4+1+a+2+2+1+a+4+2+a+8 &= 25+3a=19 \rightarrow a=-2 \\ a_1+a_4+\dots+a_{29} &= (a+1) \times 2 + 8(a+2) = 10a+18 = 18-20 = -2 \end{aligned}$$

۴) اعداد ۱۴, ۱۷, ۲ به ترتیب جمله پنجم، هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر فرض کنیم بزرگترین درجه جمله پنجمی برابر $\frac{1}{v}$ قرینه جمله پنجم باشد، جمله یازدهم چند برابر جمله اول است؟

$$\begin{cases} 25a + 5b + c = 14 \\ 49a + 7b + c = 17,2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24a + 2b = 3,2 \\ a = \frac{1}{v} \times -14 = -\frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b + 12a = 1,6 \\ b - 2,8 = 1,6 \rightarrow b = 4 \end{cases}$$

$$-5 + 20 + c = 14 \rightarrow c = -1 \rightarrow \frac{a_{15}}{a_1} = \frac{-45 + 20 - 1}{-\frac{1}{5}} = \frac{14}{-\frac{1}{5}} = -70$$

۵) جمله چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر فرض کنیم جمله دهم الگوی خطی باشد جمله یازدهم الگو چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟

$$\begin{cases} a_1 + 3d = 2a + b \\ a_1 + 7d = 7a + b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a = 4d \rightarrow a = \frac{4}{5}d \\ 10a + b = 0 \end{cases} \rightarrow \frac{15a + b}{d} = \frac{15 \times \frac{4}{5}d - 1d}{d} = \frac{4d}{d} = 4$$

۶) دیک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d ، تساوی $4a^2 = 5a_1a + 3a_2a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d چه قدری می تواند باشد؟
 $4(a+d)^2 = 5(a+d)a + 3(d+d)a \rightarrow 4a^2 + 12ad + 4d^2 = 5a^2 + 10ad + 3a^2 + 3ad \rightarrow 2a^2 + ad - 4d^2 = 0 \rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 8d^2}}{4}$

$$\rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{d}}{r} \rightarrow a = -\frac{2d}{r} \rightarrow \frac{a + 3d}{\left(\frac{r}{2}d + 3d\right) \times \frac{1}{d}} = \frac{2d - 2d}{4,5} = \boxed{1}$$

$$\rightarrow a = \frac{r}{2}d \rightarrow \left(\frac{r}{2}d + 3d\right) \times \frac{1}{d} = \boxed{4,5}$$

۷ اگر a, b, c سه جمله نخست و چهارمین یک دنباله حسابی بوده، $\frac{c}{a}, \frac{a}{b}, \frac{b}{c}$ سه جمله نخست یک دنباله هندسی باشند، هر یک بر قدر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

$$a + c = 2b \quad \frac{bc}{r} = \frac{a^2}{r} \rightarrow a^2 = bc \rightarrow 4b^2 + c^2 - 4bc = bc \rightarrow c^2 - 5bc + 4b^2 = 0$$

$$a = 2b - c \rightarrow (c - 4b)(c - b) = 0 \quad c \neq b \rightarrow c = 4b$$

$$d = 3b \rightarrow 2b, b, 4b \quad r^2 = 1 \rightarrow r = \pm 1 \rightarrow r = \boxed{\pm 1}$$

۸ اگر a, b, c سه جمله نخست و چهارمین یک دنباله هندسی بوده، $3b, 2a, c$ سه جمله نخست یک دنباله حسابی باشند، نسبت جمله پنجم به جمله ششم را در دنباله هندسی بیابید.

$$b^2 = ac \quad 3b + c = 4a \rightarrow b = \frac{4a - c}{3} \rightarrow b^2 = \frac{16a^2 + c^2 - 8ac}{9} = ac \rightarrow \frac{a_9}{a_6} = r^3 = \boxed{\pm 4}$$

$$c^2 - 17ac + 16a^2 = 0 \rightarrow (c - 16a)(c - a) = 0 \rightarrow c + a \rightarrow c = 16a \rightarrow b = \pm 4a \rightarrow r = \boxed{\pm 4}$$

۹ در یک دنباله هندسی با جمله اول a تعدادی $\frac{a_9}{(a_2)^3} + \frac{a_2}{(a)^2} = 2$ برقرار است. نسبت a_2 به جمله دوم متوالی می توانست باشد؟

$$\frac{ar^8}{a^3 r^6} + \frac{ar}{a^2} = 2 \xrightarrow{\frac{r}{a} = x} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{r}{a} = 1, -2 \rightarrow$$

$$\frac{a^r}{ar} = \frac{a}{r} = \boxed{\frac{16-1}{2}}$$

۱۰ در یک دنباله هندسی جمله سوم چند جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از $\frac{1}{4}$ کم است؟

$$\begin{matrix} \textcircled{15} & \textcircled{5} & \textcircled{5} \\ a_1 r^2 & a_1 r^4 & 27 \\ r & r^2 & r^2 \end{matrix}$$

$$a_1 r^4 = 27 \quad a_1 r^2 = a_1 r^4 \rightarrow a_1 r = 1$$

$$r^2 = 27 \quad a_4 = 9 / a_3 = 3 / a_2 = 1 / a_1 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{1}{12}}$$