

۱۴۴, ۹, ۶

به نام خدا

۱۹, ۵

پریا گل محمدی

۱) اعداد طبیعی متوالی را به هر تری دسته بندی می کنیم که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{1\}, \{2, 3, 4\}, \dots$ در دسته ۹م داریم حسابی بین دو عدد اول و آخر؟

$$\text{دسته ۹م} = \{45, 46, \dots, 11\} \rightarrow \frac{11+45}{2} = \boxed{73}$$

✓

۲) اعداد طبیعی طوری دسته بندی شده اند که در هر دسته کوچکترین عضو، $\frac{1}{3}$ برابر بزرگترین عضو دسته است. میانگین اعضای دسته پنجم را بیابید.

$$\{1, 2, 3\} \{4, \dots, 12\} \{13, \dots, 29\} \{30, \dots, 120\} \{121, \dots, 363\} \rightarrow \frac{363+121}{2} = \boxed{242}$$

۳) دنباله $a_n = \begin{cases} 2^k & n=3k \\ -2k+4 & n=3k+1 \\ [\frac{n}{3}]+a & n=3k+2 \end{cases}$ به ازای اعداد حسابی n مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جمله اول این دنباله ۹ باشد حاصل عبارت $a_1+a_2+a_3+\dots+a_{29}$ را بیابید.

$$n=0 \rightarrow 1 \quad n=1 \rightarrow 4 \quad n=2 \rightarrow 1+a$$

$$1+4+1+a+2+2+1+a+4+2+a+8 = 25+3a = 19 \rightarrow a = -2$$

$$a_1+a_2+\dots+a_{29} = (a+1) \times 2 + 8(a+2) = 10a+18 = 18-20 = \boxed{-2}$$

✓

۴) اعداد ۱۴, ۱۷, ۲ به ترتیب جمله پنجم، هفتم یک دنباله درجه دوم هستند. اگر فرض کنیم بزرگترین درجه جمله پنجمی برابر $\frac{1}{v}$ قرینه جمله پنجم باشد، جمله یازدهم چند برابر جمله اول است؟

$$\begin{cases} 25a+5b+c=14 \\ 49a+7b+c=17,2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 24a+2b=3,2 \\ a=\frac{1}{v} \times -14 = -\frac{1}{5} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b+12a=1,6 \\ b-2,8=1,6 \end{cases} \rightarrow b=4$$

$$-5+2+c=14 \rightarrow c=1 \rightarrow \frac{a_{15}}{a_1} = \frac{-45+9 \cdot 1}{-\frac{1}{5}} = \frac{14}{-\frac{1}{5}} = \boxed{5} \text{ برابر}$$

✓

۵) جمله چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب جمله دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر فرض کنیم جمله دهم الگوی خطی باشد جمله یازدهم الگو چند برابر قدر نسبت دنباله حسابی است؟

$$\begin{cases} a_1+3d=2a+b \\ a_1+7d=7a+b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 5a=4d \rightarrow a=\frac{4}{5}d \\ 10a+b=0 \end{cases} \rightarrow \frac{15a+b}{d} = \frac{15 \times \frac{4}{5}d - 1d}{d} = \frac{4d}{d} = \boxed{4}$$

✓

۶) دیک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d ، تساوی $4a^2 = 5a_1a + 3a_2a$ برقرار است. نسبت جمله چهارم دنباله به d چه قدری می تواند باشد؟

$$\begin{aligned} 4(a+d)^2 &= 5(a+d)a + 3(d+d)a \\ 4a^2+12ad+4d^2 &= 5a^2+10ad+3a^2+3ad \rightarrow 2a^2+ad-4d^2=0 \rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{d^2+8d^2}}{4} \end{aligned}$$

$$\rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{d}}{r} \rightarrow a = -\frac{2d}{r} \rightarrow \frac{a + 3d}{\left(\frac{r}{2}d + 3d\right) \times \frac{1}{d}} = \frac{2d - 2d}{4.5} = \boxed{1} \quad \text{پ} \quad \checkmark$$

۷ اگر a, b, c سه جمله نخست و چهارمین یک دنباله حسابی بوده و $\frac{a}{r}, \frac{b}{r}, \frac{c}{r}$ سه جمله نخست یک دنباله هندسی باشند و برابر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

$$\begin{aligned} a + c &= 2b & \frac{bc}{r} &= \frac{a^2}{r} \rightarrow a^2 = bc \rightarrow 4b^2 + c^2 - 4bc = bc \rightarrow c^2 - 5bc + 4b^2 = 0 \\ a &= 2b - c & & \rightarrow (c - 4b)(c - b) = 0 \quad c \neq b \rightarrow c = 4b \\ d &= 3b \rightarrow \frac{4b - b}{b} = \frac{3b - b}{b} & r &= 1 \rightarrow r = 1 \rightarrow 2r = \boxed{2} \quad \text{د} \quad \checkmark \end{aligned}$$

۸ اگر a, b, c سه جمله نخست و چهارمین یک دنباله هندسی بوده و $3b, 2a, c$ سه جمله نخست یک دنباله حسابی باشند نسبت جمله پنجم به جمله ششم را در دنباله هندسی بیابید.

$$\begin{aligned} b^2 &= ac & 3b + c &= 4a \rightarrow b = \frac{4a - c}{3} \rightarrow b^2 = \frac{16a^2 + c^2 - 8ac}{9} = ac \rightarrow \frac{a_9}{a_6} = r^3 = \pm 4 \\ c^2 - 17ac + 16a^2 &= 0 \rightarrow (c - 16a)(c - a) = 0 \rightarrow c + a \rightarrow c = 16a \rightarrow b = \pm 4a \rightarrow r = \pm 4 \end{aligned}$$

۹ در یک دنباله هندسی با جمله اول a و تناسب r داریم $\frac{a_9}{(a_r)^3} + \frac{a_r}{(a)^2} = 2$ برقرار است. نسبت a به جمله دوم چقدر می تواند باشد؟

$$\frac{ar^8}{a^3 r^3} + \frac{ar}{a^2} = 2 \xrightarrow{\frac{r}{a} = x} x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow (x + 2)(x - 1) = 0 \rightarrow x = \frac{r}{a} = 1, -2 \rightarrow$$

$$\frac{a^r}{ar} = \frac{a}{r} = \boxed{\frac{1}{2} \text{ یا } -\frac{1}{2}} \quad \text{پ} \quad \checkmark$$

۱۰ در یک دنباله هندسی جمله سوم چند جمله چهارم و جمله پنجم برابر ۲۷ است. جمله اول دنباله چقدر از $\frac{1}{4}$ کم است؟

$$\begin{aligned} a, r^2, a, r^4, 27 & \quad a, r^4 = 27 \quad a, r^4 = a, r^4 \rightarrow a, r = 1 \\ r & \quad r^2 \quad r^4 \quad r^2 = 27 \quad a_4 = 9 / a_3 = 3 / a_2 = 1 / a_1 = \frac{1}{9} \rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{36}} \end{aligned}$$