۱)

دسته اول $\{۱\}$ $۱=۱^۲$

دسته دوم $\{۲,۳,۴\}$ $۴=۲^۲$

دسته سوم $\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ $۹=۳^۲$

⋮

دسته هشتم $\to ۸^۲=۶۴$

دسته نهم $\to ۹^۲=۸۱$

دسته نهم $\to \{۶۵,۶۶,\dots,۸۱\}$

$$\frac{a+b}{۲}=\frac{۶۵+۸۱}{۲}=\frac{۱۴۶}{۲}=۷۳$$

۲ ✓

۲)

$b_n=a_{n+۱}-۱$

$a_n=\frac{۱}{۳}b_n \to b_n=۳a_n$

$\left\{\begin{array}{l} ۳a_n=a_{n+۱}-۱ \\ a_{n+۱}=۳a_n+۱ \\ a_۱=۱ \end{array}\right.$

۲۰

$b_۱=۳a_۱=۳\times ۱=۳$ $\xrightarrow{\text{دسته اول}} \{۱,۲,۳\}$

$n=۲: a_۲=۳a_۱+۱=۳\times ۱+۱=۴ \to \{۴,۵,\dots,۱۲\}$

$n=۳: a_۳=۳a_۲+۱=۳\times ۴+۱=۱۳ \xrightarrow{\text{بزرگترین عضو}} b_۳=۳a_۳=۳۹$

$n=۴=۳a_۳+۱=۳\times ۱۳+۱=۳۹+۱=۴۰ \to b_۴=۳\times ۴۰=۱۲۰$

$n=۵=۳a_۴+۱=۳\times ۴۰+۱=۱۲۱ \xrightarrow{\text{بزرگترین}} ۳\times ۱۲۱=۳۶۳$

۲ ✓

$\{۱۲۱,۱۲۲,\dots,۳۶۳\}$

$$\frac{a_۵+b_۵}{۲}=\frac{۱۲۱+۳۶۳}{۲}=\frac{۴۸۴}{۲}=۲۴۲$$

۳)

$a_۰=۲^۰=۱$

$a_۱=-۲\times ۰+۴=۴$

$a_۲=\left[\frac{۲}{۰+۲}\right]+a=۱+a$

$a_۳=۲^۱=۲$

$a_۴=-۲\times ۱+۴=۲$

$a_۵=\left[\frac{۵}{۱+۲}\right]+a=۱+a$

$a_۶=۲^۲=۴$

$a_۷=-۲\times ۲+۴=۰$

$a_۸=\left[\frac{۸}{۲+۲}\right]+a=۲+a$ ۲ ✓

$a_۹=۲^۳=۸$

$S_{۱۰}=۲۵+۳a=۱۹$

$a=-۲$

$a_۲+a_۵+a_۸+\dots+a_{۲۹}=$

$(-۱)+۰+\dots+۰=-۲$

۴)

$a_۵=۱۴$ $a_۷=۱۷/۲$

$A=\frac{۱}{۷۰}(-a_۵)=\frac{۱}{۷۰}\times(-۱۴)=\frac{-۱۴}{۷۰}=-\frac{۱}{۵}$ $A=-۰/۲$

$a_۵=A(۵^۲)+B(۵)+C=۱۴$

$-۰/۲\times ۲۵+B\times ۵+C=۱۴$

$۵B+C=۱۹$ I

$a_۷=A(۷^۲)+B(۷)+C=۱۷/۲$

$-۰/۲\times ۴۹+۷B+C=۱۷/۲$

$۷B+C=۲۷$ II

$\left\{\begin{array}{l} ۷B+\cancel{C}=۲۷ \\ ۵B+\cancel{C}=۱۹ \end{array}\right.$

۲ ✓

$۲B=۸ \to B=۴$ $۵\times ۴+C=۱۹$; $C=-۱$

$a_n=-۰/۲n^۲+۴n-۱$

$a_۱=-۰/۲+۴-۱=۳/۸$

$a_{۱۵}=-۰/۲\times ۲۲۵+۶۰-۱=۱۴$

$\frac{a_{۱۵}}{a_۱}=\frac{۱۴}{۳/۸}=۵$

۵)

$a_۴=b_۲$ $a_۸=b_۷$ $b_{۱۰}=۰$

$b_n=b_m+(n-m)d'$, $a_n=a_m+(n-m)d$

$b_{۱۰}=b_۷+(۱۰-۷)d'=۰$ $b_۷+۳d'=۰$

$b_۷=-۳d' \to a_۸=-۳d'$

$a_۸=a_۴+(۸-۴)d \to a_۸=a_۴+۴d \to a_۴=a_۸-۴d$

$b_۷=b_۲+(۷-۲)d' \to b_۷=b_۲+۵d'$ $b_۲=b_۷-۵d'$

$b_۷=a_۸, b_۲=a_۴$ با جایگذاری $\to a_۴=a_۸-۵d'$

$a_۸-۴d=a_۸-۵d'$ $-۴d=-۵d' \to d'=\frac{۴}{۵}d$

$b_{۱۵}=b_{۱۰}+(۱۵-۱۰)d' \to b_{۱۵}=۰+۵d'$

$b_{۱۵}=۵d' \to b_{۱۵}=\cancel{۵}(\frac{۴}{\cancel{۵}}d)=۴d$

$\frac{b_{۱۵}}{d}=\frac{۴d}{d}=۴$

✓ ۲

۶)

$a_2 = a + d$

$a_3 = a + 2d$

$6(a+d)^2 = 5(a+2d)a + 3(a+d)a$

$6(a^2+2ad+d^2) = (5a^2+10ad) + (3a^2+3ad)$

$6a^2+12ad+6d^2 = 8a^2+13ad$

$2a^2+ad-6d^2=0$

$2\left(\frac{a}{d}\right)^2+\left(\frac{a}{d}\right)-6=0$

2

$2x^2+x-6=0$

$2x^2+4x-3x-6=0$

$2x(x+2)-3(x+2)=0$

$(2x-3)(x+2)=0$

$2x-3=0 \rightarrow 2x=3 \qquad x=\frac{3}{2}$

$x+2=0 \rightarrow x=-2$

$\frac{a}{d}=\frac{3}{2}$ یا $\frac{a}{d}=-2 \rightarrow -2+3=1$

$\rightarrow \frac{3}{2}+3=\frac{9}{2}$

$\frac{a_4}{d}=\frac{a+3d}{d}$

$\frac{a_4}{d}=\frac{a}{d}+3$

$\frac{a}{d}\in\left\{\frac{9}{2},1\right\}$

---

۷)

واسطه حسابی $\rightarrow 2b=a+c$

″ هندسی $\rightarrow a^2=bc$

$a^2=(a+d)(a+3d)$

$=a^2+3ad+ad+3d^2$

$=a^2+\underbrace{4ad+3d^2}$

$4ad+3d^2=0$

$d(4a+3d)=0$

$4a+3d=0$

$3d=-4a$

$d=-\frac{4}{3}a \quad I$

$r=\frac{\frac{a}{3}}{b}$

$b=a+\left(-\frac{4}{3}a\right)=$

$=a-\frac{4}{3}a=-\frac{1}{3}a$

$b=-\frac{a}{3} \quad II$

$r=\frac{\frac{a}{3}}{b}=\frac{\frac{a}{3}}{-\frac{a}{3}}=-1$

$b=-a/3$

$c=a+3d=a+3\left(-\frac{4}{3}a\right)=a-4a=-3a$

متمایز $\rightarrow d\neq 0$

$=2r=2(-1)=-2$

2

---

۸)

$\left.\begin{array}{l} b=a\times r \\ c=a\times r^2 \end{array}\right\} \longrightarrow 4a=3ar+ar^2$

$4a=3ar+ar^2$

$\xrightarrow{\div a} 4=3r+r^2$

$b^2=ac$

$2a=\frac{3b+c}{2} \rightarrow 4a=3b+c \quad I$

$r^2+3r-4=0 \longrightarrow (r+4)(r-1)=0 \longrightarrow r=-4$

$r=-4 \quad r=1$ غ‌ق‌ق

$\frac{a_9}{a_6}=r^{9-6}=r^3=(-4)^3=-64$

2

---

۹)

$a_2=a\times r^{2-1}=ar$

$a_6=a\times r^{6-1}=ar^5$

جمله اول: جمله دوم

$\frac{a_6}{(a_2)^3}=\frac{a_2}{a^2}=2 \rightarrow \frac{ar^5}{(ar)^3}+\frac{ar}{a^2}=2 \rightarrow \frac{ar^5}{a^3r^3}=\frac{r^{5-3}}{a^{3-1}}=\frac{r^2}{a^2} \qquad \frac{ar}{a^2}=\frac{r}{a} \qquad \frac{r^2}{a^2}=\frac{r}{a}=2$

$\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{r}{a}=2 \rightarrow \left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{r}{a}-2=0 \rightarrow \left(\frac{r}{a}+2\right)\left(\frac{r}{a}-1\right)=0 \longrightarrow \frac{r}{a}=-2$ یا $\frac{r}{a}=1$

2

$\frac{a^2}{a_2}=\frac{a^{\cancel{2}}}{\cancel{a}r}=\frac{a}{r} \longrightarrow \frac{a}{r}=\frac{1}{-2}=-\frac{1}{2}$ یا $\frac{a}{r}=\frac{1}{1}=1 \qquad \frac{a^2}{a_2}\in\left\{-\frac{1}{2},1\right\}$

---

۱۰)

$a_3=\sqrt{a_4} \longrightarrow a_3^{\,2}=a_4$

$a_3^{\,2}=a_3\times r$

$a_3=r$

$a_4=r\times r=r^2$

$a_5=r^2\times r=r^3$

$r^3=27 \qquad r=3$

$a_5=a_1\times 3^4$

$27=a_1\times 81$

$a_1=\frac{27}{81}=\frac{1}{3}$

$\frac{1}{2}-a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{6}=\frac{1}{6}$

2