

۱۴۴، ۰۸، ۲۲

بنام خدا

برای کل محلی

۱. در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول تا سوم برابر ۲۱ و حاصلضرب آنها ۴۴ است. اگر q عددی غیر صافی باشد، مقدار q را بدست آورید.

$$a_1 \times a_2 \times \frac{a_2}{r} = 44 \rightarrow a_1 = 4$$

$$r = \frac{19}{4} = 4 \text{ یا } r = \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\frac{4}{r} + 4 + 4r = 21 \rightarrow 4r^2 - 17r + 4 = 0 \xrightarrow{ac} r^2 - 17r + 19 = 0 \rightarrow (r-19)(r-1) = 0$$

۲. به ازای یک مقدار x اعداد x^2+4 ، $2x$ ، x^2-2 به ترتیب ۳ جمله اول یک دنباله هندسی نزولی هستند. مجموع ۷ جمله اول دنباله را بدست آورید. ($q > 0$)

$$(x^2-2)(x^2+4) = 4x^2 \rightarrow x^4 - 2x^2 + 4x^2 - 8 = 4x^2 \rightarrow (x^2-4)(x^2+2) = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$$

$$\frac{x^2+4}{4}, \frac{2x}{4}, \frac{x^2-2}{4} \rightarrow 8, 4, 2, \dots$$

$$q > 0 \rightarrow x = 2$$

$$S_7 = 8 \times \frac{1-2^7}{1-2} = 128 \times 8 = \boxed{1.024}$$

۳. در یک دنباله هندسی داریم $1+q+q^2+q^3+q^4 = \frac{121}{81}$ و اگر جمله اول این دنباله ۲۴۳ باشد، مجموع ۵ جمله اول این دنباله را بیابید.

$$S_5 = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + a_1q^4 = a_1(1+q+q^2+q^3+q^4) = 243 \times \frac{121}{81} = \boxed{363}$$

۴. بین دو عدد (۴۴) پنج واسطه حسابی درج کرده ایم و عدد اول این ۷ جمله A است. اگر بین همین دو عدد (۴۴) پنج واسطه هندسی نیز درج کنیم و عدد اول این ۷ جمله B را در نظر بگیریم حاصل قدر $A+B$ را بیابید.

$$A = \frac{1+44}{2} = \frac{45}{2} = 22.5 \quad B = \sqrt{44 \times 1} = \sqrt{44} \rightarrow A+B = 22.5 + \sqrt{44} = \boxed{40.5}$$

۵. جمله صد و یکم تقاعد حسابی $24, -95, \dots$ با جمله هشتم تقاعد هندسی $128, a_1, \dots$ برابر است. قدر نسبت تقاعد هندسی را بدست آورید.

$$d = \frac{+1}{4} \rightarrow a_{1.1} = -24 + 10 \times \frac{1}{4} = 1 \rightarrow \frac{a_1}{a_{1.1}} = \frac{r^9}{1} = \frac{1}{128} \rightarrow r = \left(\frac{1}{2}\right)$$

۶. در یک تقاعد عددی جملات سوم و هفتم و دهم می توانند ۳ جمله متوالی از تقاعد هندسی باشند. قدر d برای قدر نسبت دنباله حسابی را بر حسب جمله اول تقاعد حسابی بدست آورید.

$$\frac{a_1+10d}{a_1+9d} = \frac{a_1+9d}{a_1+10d} \rightarrow a_1^2 + 10ad + 19d^2 = a_1^2 + 12ad + 9d^2 \rightarrow 2ad = 10d^2 \rightarrow a = 5d$$

$$rad = 2 \cdot d^2 \rightarrow \textcircled{1} d \neq 0 \rightarrow 2a = 2 \cdot d \rightarrow d = \frac{a}{2} \quad \text{مقدار اول}$$

$$\rightarrow \textcircled{2} d = 0 \quad \text{مقدار دوم}$$

۱۷ جملات دوم، چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به ترتیب ۳ جمله متوالی و متناهی از یک دنباله هندسی هستند اگر جمله اول این دنباله هندسی $\frac{1}{4}$ باشد، جمله دهم دنباله هندسی را بیابید.

$$\frac{a+7d}{a+3d} = \frac{a+2d}{a+d} \rightarrow a^2 + 14ad + 7d^2 = a^2 + 4ad + 9d^2 \rightarrow 10ad = 2d^2 \rightarrow a = d$$

$$a+d, a+3d, a+5d, \dots \rightarrow 2d, 4d, 6d, \dots \rightarrow q = 2 \rightarrow a_{10} = \frac{1}{4} \times 2^9 = 2^7 = 128$$

۱۸ اگر ۳ برابر جمله دوم، دو برابر جمله سوم و جمله چهارم یک دنباله هندسی غیر ثابت، ۳ جمله متوالی یک دنباله حسابی باشند قدر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

$$3aq, 2aq^2, aq^3 \rightarrow aq^3 - 2aq^2 = 2aq^2 - 3aq \rightarrow aq^2(q-2) = aq(2q-3)$$

$$\rightarrow q^2 \cdot 2q - 2q - 3 \rightarrow q^2 - 4q + 3 = 0 \rightarrow (q-3)(q-1) = 0 \rightarrow q = 1 \times \text{غیر ثابت}$$

$$\rightarrow \boxed{q=3} \checkmark$$

۱۹ دنباله حسابی $\dots, \frac{7}{4}, 2$ اگر به جملات چهارم، هشتم و یازدهم حتمی ثابت اضافه کنیم به ترتیب از راست به چپ سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی حاصل می شود قدر نسبت دنباله هندسی را بیابید.

$$d = -\frac{1}{4} \rightarrow t_4 = 2 - 3 \times \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \quad / \quad t_8 = 2 - 7 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad / \quad t_{13} = 2 - 12 \times \frac{1}{4} = -1$$

$$\frac{5}{4} + m, \frac{1}{4} + m, -1 + m \rightarrow (m-1)(m+\frac{5}{4}) = (m+\frac{1}{4})^2 \rightarrow q = \left(\frac{5}{4}\right)$$

$$m^2 + \frac{m}{4} - \frac{5}{4} = m^2 + \frac{1}{16} + \frac{m}{2} \rightarrow 4m - 20 = 1 + 8m \rightarrow m = -\frac{21}{4}$$

۲۰ جملات اول و چهارم و هفتم یک دنباله هندسی که مجموع آنها ۷۳ می باشد به ترتیب جملات اول و دوم و دهم یک دنباله حسابی هستند قدر نسبت دنباله حسابی را بیابید.

$$a=1$$

$$\uparrow \quad \quad \quad 73$$

$$a(1+q^3+q^6) = 73 \quad aq^3 - a = \frac{aq^6 - aq^3}{1} \rightarrow (q^3-1) \times 8 = q^3(q^3-1) \rightarrow q = 2$$

$$a, 8a, \dots, 64a \rightarrow d = 7a = \boxed{7}$$

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \quad \textcircled{1}$$