تکلیف ۱۵ — ماندانا عباس نژاد

۱)
$\frac{a}{q} \times a \times aq = ۶۴ \Rightarrow a^۳ = ۶۴ \longrightarrow a = ۴$ ، $\frac{a}{q} + a + aq = ۲۱ \Rightarrow \frac{۴}{q} + ۴ + ۴q = ۲۱ \xrightarrow{\times q} ۴q^۲ + ۴q + ۴ = ۲۱q \Rightarrow ۴q^۲ - ۱۷q + ۴ = ۰$

$\Delta = ۲۸۹ - ۶۴ = ۲۲۵ \Rightarrow x = \frac{۱۷ \pm \sqrt{۲۲۵}}{۸} \to ۴ \Rightarrow \boxed{q = \frac{۱}{۴}}$

۲)
$a_۱ = x^۲ + ۴$ ، $a_۲ = ۲x$ ، $a_۳ = x^۲ - ۲$ ، $۰ < q < ۱$ (چون نزولی) ، $\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{a_۳}{a_۲} \xRightarrow{\text{جایگذاری}} \frac{۲x}{x^۲+۴} = \frac{x^۲-۲}{۲x}$

$۴x^۲ = (x^۲+۴)(x^۲-۲) \Rightarrow ۴x^۲ = x^۴ + ۴x^۲ - ۲x^۲ - ۸ \Rightarrow ۴x^۲ = x^۴ + ۲x^۲ - ۸ \Rightarrow x^۴ - ۲x^۲ - ۸ = ۰$

$x^۲ = y \Rightarrow y^۲ - ۲y - ۸ = ۰ \to (y-۴)(y+۲) = ۰ \to x^۲ = ۴ \Rightarrow x = \pm ۲$
$۲ \to a_۱ = ۸,\ a_۲ = ۴,\ \boxed{q = \frac{۱}{۲}} ✓,\ a_۳ = ۲$
$-۲ \to a_۱ = ۸,\ a_۲ = -۴,\ a_۳ = ۲$ ✗

$S_n = a\left(\frac{۱-q^۷}{۱-q}\right) \longrightarrow ۸ \times \left(\frac{۱ - \frac{۱}{۱۲۸}}{۱ - \frac{۱}{۲}}\right) = \frac{۸ \times \frac{۱۲۷}{۱۲۸}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۱۲۷ \times ۲}{۱۲۸} = ۱۵/۸۷۵$ ← در نتیجه

۳)
$۱ + q + q^۲ + q^۳ + q^۴ = \frac{۱۲۱}{۸۱} \times a_۱ \Rightarrow a_۱(۱ + q + q^۲ + q^۳ + q^۴) = \frac{۱۲۱}{۸۱} a_۱ \Rightarrow a_۱ + aq + aq^۲ + aq^۳ + aq^۴ = \frac{۱۲۱}{\cancel{۸۱}} \times \cancel{۲۴۳}^{۳} \Rightarrow a_۱ + aq + aq^۲ + aq^۳ + aq^۴ = \boxed{۳۶۳}$

۴)
$d = \frac{b-a}{n+1} \Rightarrow \frac{۴۳-۱}{۴} = \boxed{۱۰/۵}$ ، جمله چهارم $= a_۴ \longrightarrow a_۴ = ۱ + (۳) \times ۱۰/۵ = \boxed{۳۲/۵}$ A

$\frac{b}{a} = q^{n+1} \longrightarrow \frac{۶۴}{۱} = q^۶ \longrightarrow q = \pm ۲ \longrightarrow$
if $q = -۲ \Rightarrow a_۴ = ۱ \times (-۲)^۳ = -۸$
if $q = ۲ \Rightarrow a_۴ = ۱ \times (۲)^۳ = +۸$

$A + B = ۳۲/۵ \pm ۸ \to \boxed{۴۰/۵}$ ✓ ، $\boxed{۲۴/۵}$ ✓

۵)
$a_۱ + (n-1)d \Rightarrow -۲۴ + (n-1)\frac{۱}{۴} \to a_{۱۰۱} = -۲۴ + \cancel{۱۰۰}^{۲۵} \times \frac{۱}{\cancel{۴}} = \boxed{۱}$

$d = \frac{-۹۵}{۴} - (-۲۴) = \frac{۱}{۴}$

$a_۱ \times q^{n-1} \longrightarrow ۱۲۸ \times q^۷ = ۱ \Rightarrow q^۷ = \frac{۱}{۱۲۸} \Rightarrow \boxed{q = \frac{۱}{۲}}$

۶)
$(a_۱ + ۸d)(a_۱ + ۲d) = (a_۱ + ۶d)^۲ \Rightarrow a^۲ + ۱۰ad + ۱۶d^۲ = a^۲ + ۱۲ad + ۳۶d^۲ \Rightarrow -۲ad = ۲۰d^۲ \Rightarrow -۲a = ۲۰d \Rightarrow a = -۱۰d \Rightarrow \boxed{d = -\frac{۱}{۱۰}a}$

۷)
$a_۱ + d \Rightarrow ۲d$ ، $a_۱ + ۳d \Rightarrow ۴d$ ، $a_۱ + ۷d \Rightarrow ۸d \Rightarrow (a_۱ + ۳d)^۲ = (a_۱ + d)(a_۱ + ۷d)$

$\cancel{a^۲} + ۹d^۲ + ۶ad = \cancel{a^۲} + ۸ad + ۷d^۲ \Rightarrow ۲d^۲ = ۲ad \Rightarrow \boxed{d = a}$ ، $\begin{cases} q = ۲ \\ a_۱ = \frac{۱}{۴} \end{cases} \Rightarrow a_{۱۰} = a_۱q^۹ \Rightarrow$

$\frac{۱}{۴} \times ۲^۹ = \frac{۱}{۲^۲} \times ۲^{۹ \to ۷} = \boxed{۱۲۸}$

۸)
$۳a_۲ \Rightarrow ۳a_۱q$ ، $۴a_۳ \Rightarrow ۲a_۱q^۲$ ، $a_۴ \Rightarrow a_۱q^۳ \Rightarrow \frac{۳a_۱q + a_۱q^۳}{۲} = ۲a_۱q^۲ \Rightarrow ۳a_۱q + a_۱q^۳ = ۴a_۱q^۲ \Rightarrow a_۱q(۳ + q^۲) = ۴a_۱q^۲ \Rightarrow ۳ + q^۲ = ۴q \Rightarrow q^۲ - ۴q + ۳ = ۰ \to ۱ ، ۳$

۹)
(۱) $a + ۳d + x$
$\to ۱ + ۳(-\frac{۱}{۴}) + x$
$\to -\frac{۵}{۴} + x \Rightarrow \frac{۵}{۴} - \frac{۲۱}{۴} = -۴$

(۲) $a + ۷d + x$
$\to \frac{۱}{۴} + x$
$\to \frac{۱}{۴} - \frac{۲۱}{۴} = -۵$

(۳) $a + ۱۲d + x$
$\to -۱ + x$

$d = -\frac{۱}{۴}$ ، $a = ۲$
$b^۲ = ac \to (\frac{۱}{۴} + x)^۲ = (x-۱)(x + \frac{۵}{۴})$
$x^۲ + \frac{۱}{۱۶} + \frac{۱}{۲}x = x^۲ + \frac{۱}{۴}x - \frac{۵}{۴} \Rightarrow \boxed{x = -\frac{۲۱}{۴}}$

$q^{m-n} = \frac{a_m}{a_n} \Rightarrow q^{۲-۱} = \frac{-۵}{-۴} \Rightarrow \boxed{q = \frac{۵}{۴}}$ جواب

$$a_1 + a_1 q^3 + a_1 q^6 = 73 \xrightarrow{q=2} a_1 + 8a_1 + 64a_1 = 73 a_1 = 73 \longrightarrow a_1 = 1 \qquad (10$$

$$d = \frac{a_4 - a_1}{1} = a_1 q^3 - a_1 = a_1(q^3-1) \longrightarrow d = a_1(q^3-1) \longrightarrow 1(8-1) = 7 \longrightarrow$$ جواب

$$9d = a_1 q^6 - a_1 = a_1(q^6-1) \Rightarrow d = \frac{a_1(q^6-1)}{9} \Rightarrow \frac{a_1(q^6-1)}{9} = a_1(q^3-1)$$

$$\frac{(q^3+1)(q^3-1)}{9} = q^3-1 \Rightarrow q^3+1 = 9 \Rightarrow q^3 = 8 \rightarrow \boxed{q=2}$$