

1 / دهم دختر A - اگر دنباله a_n را در نظر بگیرید:

(الف) جمله دهم دنباله را به دست آورید.

$$a_n = \frac{1}{4} \times 2^{n-1}$$

$$a_1 = \frac{1}{4} \times 2^0 = 2^1$$

(ب) حاصل $\frac{a_{14}}{a_{13}}$ را به دست آورید.

$$\frac{a_{14}}{a_{13}} = \frac{r^{14}}{r^{13}} = r = 2$$

$$r^4 = 2^4 = 16$$

(ج) واسطه‌ی هندسی بین جمله‌های دهم این دنباله را به دست آورید.

$$a_k = ar^k = \frac{1}{4} \times 1 = 1$$

$$a_1 = ar^0 = \frac{1}{4} \times 2^0 = 2^0$$

$$\frac{2^0 + 2^4}{2} = \frac{2^4 + 2^0}{2} = 2^4 + 2^0 = 16 + 1 = 17$$

(>) عدد ۱۲۸ جزین جبری این دنباله ی هندسی است $a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{-1} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$

$128 = 2^{n-2}$

$2^7 = 2^{n-2} \Rightarrow 7 = n-2 \rightarrow n = 9$

سوال دوم) جمله ی پنجم و هفتم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۱۲، ۹۶ است. جمله ی دهم این دنباله را به دست آورید.

$a_5 = ar^4 = 12$ $a_7 = ar^6 = 96 \rightarrow r^2 = \frac{96}{12} = 8 \rightarrow r = 2$

$a_{10} = ar^9 = ar^4 \times r^5$

$12 \times 32 = 384$

سوال سیم) در یک دنباله ی هندسی $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 2^{14}$ است:

$(r^5)^n = 2^{14}$ حاصل ضرب

(الف) مقدار a_3 را به دست آورید. $(a_3)^5 = 3^5$ $(a_3) = 3$

(ب) مقدار $a_1 \times a_5$ را به دست آورید $a_1 \times ar^4 = ar^4 = (ar^2)^2 = 9$

سوال چهارم) اگر به عدد 2^a , $4\sqrt{2}$, 2^b تشکیل دنباله هندسی بداند، رابطه‌ی حلی بین a و b

$$2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$$

$$a, b \text{ را بیابید.} \quad a+b=5$$

$$32 = 2^a \times 2^b \Rightarrow 2^5 = 2^{a+b}$$

$$\text{رابطه حلی} = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$$

سوال پنجم) حبات درم، رهنم، و یازدهم یک دنباله هندسی به ترتیب x ، $1-x$ و $x+1$ باشند.

$$\begin{aligned} a_3 = 1-x &= ar^2 \\ a_2 = x &= ar \\ a_1 = x+1 &= ar^0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{aligned} r^2 &= \frac{x}{1-x} \\ r &= \frac{x+1}{x} \end{aligned} \right.$$

$$x^2 = (1+x)(1-x)$$

$$x^2 = 1 - x^2$$

$$2x^2 = 1 \quad x^2 = \frac{1}{2}$$

$$x \rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\rightarrow +\frac{\sqrt{2}}{2}$$

سوال ۲۵) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۱، و مجموع جملات دوم و پنجم برابر ۱۲ است. در این جملات اول تا چهارم این دنباله هندسی، متنازندی بزرگترین جمله را به دست آورید.

$$\begin{aligned} a + aq^3 &= 21 & a(1+q^3) &= 21 & \frac{a(1+q^3)}{q(q+q^2)} &= \frac{21}{12} \Rightarrow \frac{1+q^3}{q+q^2} = \frac{7}{4} \rightarrow \\ aq + aq^4 &= 12 & a(q+q^4) &= 12 & & \end{aligned}$$

$$\frac{(1+q^3)(q^2-q+1)}{q(q+1)} = \frac{7}{4} \Rightarrow 1-q+q^2 = \frac{7q}{4} \rightarrow 4q^2 - 11q + 4 = 0 \rightarrow q^2 - 11q + 4 = 0$$

$$\frac{1}{4}(q-1)(q-4) = 0 \rightarrow q = 1, 4$$

برای $q=3$: $aq(1-q) = 12 \rightarrow a = 1 \rightarrow 1, 3, 9, 27$
 برای $q=\frac{1}{3}$: $aq(1-q) = 12 \rightarrow a = 27 \rightarrow 27, 9, 3, 1$

سوال ۲۶) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول، دوم و پنجم برابر ۱۳، و حاصل ضرب آنها ۲۷ است. جملات اول تا دوم این دنباله را مشخص کنید.

$$a + aq + aq^4 = 13 = a(1+q+q^4) = 13$$

$$a \times aq \times aq^4 = 27 \Rightarrow a^3 q^5 = 27 \Rightarrow aq = 3$$

$$\frac{3}{q}(1+q+q^4) = 13 \xrightarrow{q \neq 0} 3(1+q+q^4) = 13q \rightarrow 3q^4 + 3q + 3 = 13q \rightarrow 3q^4 - 10q + 3 = 0$$

$$3q^4 - 10q + 3 = 0 \rightarrow q^4 - 10q + 3 = 0 \rightarrow (q-1)(q-3) = 0 \rightarrow q = 1, 3$$

برای $q=3$: $aq = 3 \rightarrow a = 1 \rightarrow 1, 3$
 برای $q=\frac{1}{3}$: $aq = 3 \rightarrow a = 9 \rightarrow 9, 3$

سوال ۲۷) دنباله هندسی $a, 2, 6, 18, \dots$ را به نظر بگیرید:

$$\frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

الف) مجموع ا جمله‌ی اول دنباله هندسی (S) را بیابید.

$$S_1 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{6(1-3^1)}{1-3} = \frac{6(1-3)}{-2} = \frac{6(-2)}{-2} = 6$$

ب) حاصل ضرب، اصلی اول دنباله‌ی هندسی را بیابید.

$$t_1 = ar^9 = 2 \times 3^9$$

$$(2 \times 2 \times 3^9)^{10} = 2^{10} \times 3^{90}$$

سوال بنم (گابت کنید اگر در یک دنباله‌ی هندسی درجه را از جمله بعدی کم کنیم، اعداد حاصل یک تصاعد هندسی می‌دهند و همچنین قدر نسبت دنباله‌ی جدید را بر حسب q به دست آورید.

دنباله‌ی هندسی $a_n = aq^{n-1}$ و $aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}$ و a

$$aq - a = a(q-1)$$

$$aq^2 - aq = aq(q-1)$$

$$\Rightarrow \text{دنباله‌ای که از کم می‌شود}$$

$$b_n = a_{n+1} - a_n = aq^n - aq^{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$$

$$b_n = a(q-1)q^{n-1}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)q^{n-1}} = q$$

همچنین می‌دانیم تقسیم درجانه هندسی بدالی می‌دهد q

نسبت هندسی q می‌دهد

سوال دهم) در رابطه زیر را اثبات کنید.

الف) مجموع جمله‌ها در صفات حای

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a + (n-1)d \\ [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + [a + (n-n)d] \end{cases}$$

$$2S_n = (a + [a + (n-1)d]) + ((a + d) + [a + (n-2)d]) + \dots$$

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

ب) مجموع جمله‌ها در صفات سری

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \xrightarrow{\times r}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$rS_n - S_n = (ar + ar^2 + \dots + ar^n) - (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1})$$

باید زنون کنیم r یک نیست، جمله‌ها با از هم ستانده شدن

$$S_n(1-r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$