

مسئله 19

دهم دختر A - اللورد دنباله  
سوال یکم دنباله هندسی ... و 2 و 1 و  $\frac{1}{2}$  و  $a_n$  را در نظر بگیرید:

(الف) جمله دهم دنباله را بدست آورید.  $a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1}$   
 $a_1 = \frac{1}{2} \times 2^0 = 1$  ✓

(ب) حاصل  $\frac{a_{17}}{a_{13}}$  را بدست آورید.  
 $\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{2^{17}}{2^{13}} = 2^4 = 16$  ✓

واسطه هندسی  $a_v = a \times q^4 = \frac{1}{2} \times 2^4 = 8$

(ج) واسطه هندسی بین جمله دهم این دنباله را بدست آورید.  
 $a_4 = ar^3 = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$   
 $a_1 = ar^0 = \frac{1}{2} \times 2^0 = \frac{1}{2}$   
 $\frac{a_4 + a_1}{2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{2}$  ✓



(>) عدد ۱۲۸ جزین جدولی این دنباله ی هندسی است  $a_n = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = 2^{-1} \times 2^{n-1} = 2^{n-2}$

$128 = 2^{n-2}$

$2^7 = 2^{n-2} \Rightarrow 7 = n-2 \rightarrow n = 9$

سوال دوم) جدولی پنجم و هفتم یک دنباله ی هندسی به ترتیب ۱۲، ۹۶ است. جدولی دهم این دنباله را به دست آورید.

$a_5 = ar^4 = 12$        $a_7 = ar^6 = 96 \rightarrow r^2 = \frac{96}{12} = 8 \rightarrow r = 2$

$a_{10} = ar^9 = ar^4 \times r^5$

$12 \times 32 = 384$

سوال سیم) در یک دنباله ی هندسی  $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 2^{14}$  است:

$(r^5)^n = 2^{14}$  حاصل ضرب

(الف) مقدار  $a_3$  را به دست آورید.  $(a_3)^5 = 3^5$        $(a_3) = 3$

(ب) مقدار  $a_1 \times a_5$  را به دست آورید  $a_1 \times ar^4 = ar^4 = (ar^2)^2 = 9$



سوال چهارم) اگر به عدد  $2^a$ ,  $4\sqrt{2}$ ,  $2^b$  تشکیل دنباله هندسی بداند، رابطه‌ی حلی بین  $a$  و  $b$  را بیاید.

$2^a$ ,  $4\sqrt{2}$ ,  $2^b$

$2^a \times 2^b = (4\sqrt{2})^2 \Rightarrow 2^{a+b} = 2^5 \Rightarrow a+b=5$

رابطه حلی:  $\frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = 2.5$

سوال پنجم) حالات دوم، رهم یک دنباله هندسی به ترتیب  $1-x$ ،  $x$  و  $x+1$  می باشد.

مقدارهای ممکن برای  $x$  را به دست آورید.

$a_3 = 1-x = ar^2$   
 $a_2 = x = ar$   
 $a_1 = x+1 = ar^0$

$r = \frac{x}{1-x}$   
 $r = \frac{x+1}{x}$

$\frac{x}{1-x} = \frac{x+1}{x} \Rightarrow x^2 = (1+x)(1-x)$   
 $x^2 = 1 - x^2$   
 $2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

نتیجه:  $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

● dotnote

فقط این مورد قبول



سوال نهم) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۱، و مجموع جملات دوم و پنجم برابر ۱۲ است. در این جملات اول تا چهارم این دنباله هندسی، متنازندی بزرگترین جمله را به دست آورید.

$$\begin{aligned} a + aq^3 &= 21 & a(1+q^3) &= 21 & \frac{a(1+q^3)}{q(q+q^2)} &= \frac{21}{12} \Rightarrow \frac{1+q^3}{q+q^2} = \frac{7}{4} \rightarrow \\ aq + aq^4 &= 12 & a(q+q^4) &= 12 & & \end{aligned}$$

$$\frac{(1+q^3)(q^2-q+1)}{q(q+1)} = \frac{7}{4} \Rightarrow 1-q+q^2 = \frac{7q}{4} \rightarrow 4q^2 - 11q + 4 = 0 \rightarrow q^2 - 1.1q + 1 = 0$$

$$\frac{1}{4}(q-1)(q-4) = 0 \rightarrow q = 1, 4$$

برای  $q=3$ ،  $aq(1-q)=12 \rightarrow a=1 \rightarrow 1, 3, 9, 27$   
 برای  $q=\frac{1}{3}$ ،  $aq(1-q)=12 \rightarrow a=27 \rightarrow 27, 9, 3, 1$

سوال دهم) در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول، دوم و پنجم برابر ۱۳، و حاصل ضرب آنها ۲۷ است. جملات اول تا دوم این دنباله را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} a + aq + aq^4 &= 13 & a(1+q+q^4) &= 13 \\ a \times aq \times aq^4 &= 27 & a^3q^5 &= 27 \Rightarrow aq = 3 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{q}(1+q+q^4) = 13 \xrightarrow{q \neq 0} 3(1+q+q^4) = 13q \rightarrow 3q^4 + 3q + 3 = 13q$$

$$3q^4 - 10q + 3 = 0 \rightarrow q^4 - 1.1q + 1 = 0 \rightarrow (q-1)(q^3 - 1.1q + 1) = 0$$

برای  $q=3$ ،  $a=1$ ،  $1, 3, 9$   
 برای  $q=\frac{1}{3}$ ،  $a=27$ ،  $27, 9, 3$

سوال یازدهم) دنباله هندسی  $a, 2, 6, 18, \dots$  را به نظر بگیرید:

$$\frac{a}{2} = 3 \Rightarrow a = 6$$

الف) مجموع ا جمله ی اول دنباله ی هندسی (S) را بیابید.

$$S_1 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{6(1-3^1)}{1-3} = \frac{6(1-3)}{-2} = \frac{6(-2)}{-2} = 6$$



ب) حاصل ضرب، ابعادی اول دنباله‌ی هندسی را بیابید.

$$b_1 = ar^0 = 2 \times 3^0$$

$$(2 \times 2 \times 3^0)^{\frac{n}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \times 3^{0 \times \frac{n}{2}}$$

سوال بنظر می آید اگر در یک دنباله‌ی هندسی درجه را از ابعادی بعدی کم کنیم، اعداد حاصل تفریق تصاعد هندسی می دهند و همچنین قدر نسبت دنباله‌ی جدید را برابر  $q$  به دست آورید.

دنباله‌ی هندسی می باشد  $a_n = aq^{n-1}$

$a, aq, aq^2, aq^3, \dots, aq^{n-1}$

$aq - a = a(q-1)$

$aq^2 - aq = aq(q-1)$

$\Rightarrow$  دنباله‌ای که از کم می بینیم  $b_n = a_{n+1} - a_n = aq^n - aq^{n-1} = aq^{n-1}(q-1)$

$b_n = a(q-1)q^{n-1}$

$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a(q-1)q^n}{a(q-1)q^{n-1}} = q$

همچنین می داریم تقسیم درجانه هندسی بدین الی می باشد  $q$

نسبت هندسی  $q$  می باشد





سوال دهم) روابط زیر را اثبات کنید.

الف) مجموع جمله‌ها در صفات حسابی

$$\begin{cases} a_1 + a_1 + d + a_1 + 2d + a_1 + 3d + \dots + a + (n-1)d \\ [a + (n-1)d] + [a + (n-2)d] + \dots + [a + (n-n)d] \end{cases}$$

$$2S_n = (a + [a + (n-1)d]) + ((a + d) + [a + (n-2)d]) + \dots$$

$$2S_n = n[2a + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

ب) مجموع جمله‌ها در صفات هندسی

$$S_n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} \xrightarrow{\times r}$$

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^n$$

$$rS_n - S_n = (ar + ar^2 + \dots + ar^n) - (a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1})$$

$$S_n(1-r) = a - ar^n$$

$$S_n = \frac{a - ar^n}{1-r} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

باید نشان دهیم که این دو فرمول با هم سازگارند