

۱۴.۴.۰۸.۱۰

« بنام خدا »

پایه نهم

الف) دنباله هندسی $a_n = \frac{1}{2}$ ، 1 ، 2 ، ... را در نظر بگیرید. $a_n = a_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} = \frac{2^{n-1}}{2} = 2^{n-2}$ (الف) جمله دهم دنباله را بدست آورید.

ب) حاصل $\frac{a_{17}}{a_{13}}$ را بدست آورید.

$$\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{a_1 q^{17}}{a_1 q^{13}} = q^4 = 2^4 = 16$$

ج) رابطه هندسی بین جملات چهارم و دهم این دنباله را بدست آورید.

$$\pm \sqrt{a_4 a_9} = \pm a_7 \rightarrow \pm \sqrt{\frac{1}{2} \times 2^6} = \pm 2^{\frac{5}{2}} = \pm 2^2 = \pm 4$$

د) عدد ۱۲۸ چندین جمله این دنباله هندسی است؟ $128 = \frac{1}{2} \times 2^{n-1} \rightarrow n-1 = 8 \rightarrow n = 9$

ه) جمله پنجم و هشتم یک دنباله هندسی به ترتیب ۹۶، ۱۲ است. جمله دهم این دنباله را بدست آورید.

$$\frac{a_8}{a_5} = q^3 = \frac{96}{12} = 8 \rightarrow q = 2 \quad a_{10} = a_8 q^2 = 96 \times 4 = 384$$

۳) یک دنباله هندسی $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 243$ است. این دنباله را بدست آورید.

$$a_3 = 243 \rightarrow a_3 = 3 \quad \frac{a_5}{a_3} \times \frac{a_3}{a_1} \times a_2 \times a_4 \times a_5 = 243 \rightarrow a_1 = 243$$

ب) مقدار $a_1 \times a_5$ را بدست آورید.

$$a_1 a_5 = \frac{a_3}{q^2} \times a_3 q^4 = a_3^2 = 3^2 = 9$$

۴) اگر ۳ عدد 2^a ، $4\sqrt{2}$ ، 2^b تشکیل دنباله هندسی بهفند رابطه حسابی بین دو عدد a ، b را بیابید.

$$2^a, 2^{2.5}, 2^b \rightarrow \frac{a+b}{2} = 2.5 \quad 4\sqrt{2} = 2^{2.5}$$

۵) جملات سوم و هفتم و یازدهم یک دنباله هندسی به ترتیب $1-\alpha$ ، α ، $\alpha+1$ می باشند. مقادیر ممکن برای α را بدست آورید.

$$(1-\alpha)(1-\alpha) = \alpha^2 \rightarrow 1-\alpha^2 = \alpha^2 \rightarrow 2\alpha^2 = 1 \rightarrow \alpha^2 = \frac{1}{2} \rightarrow \alpha = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۶) یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و چهارم برابر ۲۸، مجموع جملات دوم و پنجم برابر ۱۲ است. دین جملات اول تا چهارم این دنباله هندسی مقدار عددی بزرگترین جمله را بدست آورید.

$$\begin{aligned} a_1 + a_4 q^3 &= 28 \\ a_1 q + a_1 q^4 &= 12 \end{aligned} \quad \frac{a_1(q^3+1)}{a_1 q(q+1)} = \frac{7}{3} \rightarrow \frac{a_1(q^3+1)(q^2-q+1)}{a_1 q(q+1)} = \frac{7}{3}$$

$$3q^2 - 3q + 3 = 7q \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0 \xrightarrow{ac} q^2 - 10q + 9 = 0 \rightarrow (q-9)(q-1) = 0$$

$$\rightarrow q = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{و} \quad q = \frac{1}{3} \rightarrow q = 3 : a_1 = 1 \quad 1, 3, 9, 27$$

$$\rightarrow q = \frac{1}{3} : a_1 = 27 \quad 27, 9, 3, 1$$

✓ یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول دهم و دوم برابر ۱۳ و حاصلضرب آن ۲۷ است. جملات اول تا سوم این دنباله را مشخص کنید.

$$\frac{a_r}{3} \times a_r \times a_r q = 27 \rightarrow a_r = 3 \quad \frac{a_r}{r} + a_r + a_r r = 13$$

$$\frac{3^r}{r} + 3 + 3r = 13 \rightarrow 3r^2 + 3r + 3 = 13r \rightarrow 3r^2 - 10r + 3 = 0 \xrightarrow{ac} r^2 - 10r + 9 = 0$$

$$(r-9)(r-1) = 0 \rightarrow r = \frac{9}{3} = 3 \quad \text{و} \quad r = \frac{1}{3} \rightarrow r = 3 : 1, 3, 9$$

$$\rightarrow r = \frac{1}{3} : 9, 3, 1$$

۱۸ دنباله هندسی $a_n = 2, 6, 18, \dots$ را در نظر بگیرید.
الف) مجموع ۱۰ جمله اول دنباله هندسی (S_{10}) را بیابید.

$$S_{10} = 2 \times \frac{3^{10} - 1}{3 - 1} = 3^{10} - 1$$

ب) حاصلضرب ۱۰ جمله اول دنباله هندسی را بیابید.

$$a_1 \times a_2 \times \dots \times a_{10} = a_1^{10} \times r^{45} = 2^{10} \times 3^{45}$$

۱۹ ثابت کنید اگر یک دنباله هندسی هر عدد را از جمله بعدی کم کنیم، اعداد حاصل تشکیل یک دنباله هندسی می دهند همچنین قدر نسبت دنباله جدید را بر حسب q بدست آورید.

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

$$\begin{array}{ll} \textcircled{1} & aq - a = a(q-1) \\ \textcircled{2} & aq^2 - aq = aq(q-1) \\ \textcircled{3} & aq^3 - aq^2 = aq^2(q-1) \end{array}$$

$$a(q-1), aq(q-1), aq^2(q-1), \dots \quad \text{هندسی}$$

$$\boxed{\times q} \quad \boxed{\times q}$$

$$q = \text{قدر نسبت دنباله هندسی جدید}$$

۲۰ روابط زیر را اثبات کنید:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + \dots + a_2 + a_1$$

الف) مجموع جملات در تساوی حسابی

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \dots + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \rightarrow Cn$$

$$2S_n = n(a_1 + a_n) \rightarrow S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \quad \rightarrow a_2 + a_{n-1} = a_1 + a_n = a_3 + a_{n-2} = \dots$$

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

ب) مجموع جملات در تساوی هندسی

$$qS_n = aq + aq^2 + \dots + aq^n \rightarrow qS_n - S_n = aq^n - a \rightarrow S_n(q-1) = a(q^n - 1) \rightarrow$$

$$S_n = a \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$