۱۹,۵

آنیا شکرمی

۱- $a_n = \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ ۱,۵

الف) $a_{10} = aq^9 = \frac{1}{2}\times 2^9 = 256$

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{aq^{16}}{aq^{12}} = q^4 = 2^4 = 16$

ج) $q^{n+1} = \frac{b}{a} = \frac{aq^9}{aq^3} = q^6 \longrightarrow \cancel{n+1=6 \quad \boxed{n=5}}$

$n-1=6 \to n=7$ $\quad a_7 = a\times q^6$

$\frac{1}{2}\times 64 = 32$

د) $\frac{1}{2}q^{n-1} = 128 \quad q^{n-1} = 256 = 2^8 \quad n-1=8 \quad \boxed{n=9}$

۲- $a_5 = 12 = aq^4 \,,\, a_8 = 96 = aq^7 \longrightarrow q^3 = \frac{96}{12} = 8 \longrightarrow q=2$

$a\times 2^4 = 12 \to a = 0.75 = \frac{3}{4}$

$a_{10} = \frac{3}{4}\times 2^9 = 384$

۲

۳- ضرب جمله‌ها: $(\text{وسطی})^n = (a_3)^5 = 243 \quad a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = 243$ ۲

الف) $\hookrightarrow a_3 = 3$ $\qquad$ ب) $a_1\times a_5 = a_3\times a_3 = 3\times 3 = 9$

۴- دنباله هندسی $\leftarrow 2^a, 4\sqrt{2}, 2^b$

$(4\sqrt{2})^2 = 2^a\times 2^b$

$16\times 2 = 2^{a+b} = 32 = 2^5 \longrightarrow a+b=5$ $\quad$ واسطه حسابی: $\frac{b+a}{n+1} = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2} = 2.5$ ۲

۵- $aq^2, aq^6, aq^{10} \longrightarrow x+1, x, 1-x$ ۲

$a_3\times a_{11} = a_7\times a_7 \longrightarrow (a_7)^2 = a_3\times a_{11}$

$\hookrightarrow x^2 = (1-x)(x+1) = 1-x^2$

$2x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{2} \quad x = \frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(۶)

$a_1 + a_4 = 28$ $\qquad a + aq^3 = a(1+q^3) = \cancel{a}(\cancel{1+q})(1-q+q^2)$

$a_2 + a_3 = 12$ $\qquad aq + aq^2 = \cancel{a}q(\cancel{1+q}) = 12$

ص

$\frac{28}{12} = \frac{(1-q+q^2)}{q} = \frac{7}{3}$ $\qquad 7q = 3(1-q+q^2)$

$7q = 3 - 3q + 3q^2$ $\qquad 3q^2 - 10q + 3 = 0$

$q = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{18}{6} = 3 \;,\; \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$a(1+3^3) = 28 \rightarrow a = 1$ $\quad / \quad a(1+(\frac{1}{3})^3) = 28$

$a \times \frac{28}{27} = 28$

$1, 3, 9, 27, \dots$ یا $\quad \rightarrow a = 27 \rightarrow 27, 9, 3, 1, \dots$

بزرگ ترین جمله ۲۷ است

---

(۷)

$a_1 + a_2 + a_3 = 13$ $\qquad \frac{a}{q} + a + aq = 13 \longrightarrow \frac{3}{q} + 3 + 3q$

$a_1 \times a_2 \times a_3 = 27$ $\qquad \frac{a}{q} \times a \times aq = a^3 = 27 \longrightarrow a = 3$

$\left(\frac{3}{q} + 3 + 3q = 13\right) \times q \rightarrow 3 + 3q + 3q^2 = 13q \rightarrow 3q^2 - 10q + 3 = 0$

$q = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{18}{6} = 3 \;,\; \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 1, 3, 9$ یا $9, 3, 1$

ص

---

(۸)

$a_n = 2, 6, 18, \dots$

$\rightarrow q = 3 , a = 2$

الف) $S_{10} = a \times \left(\frac{q^n - 1}{q-1}\right) = 2 \times \frac{3^{10}-1}{3-1} =$

ص

$3^{10} - 1 = (3^5+1)(3^5-1) = (243+1)(243-1) = \boxed{59048}$

ب) حاصل ضرب $= (a_1 \times a_{10})^{\frac{n}{2}} = (2 \times 2 \times 3^9)^5 = (2^2 \times 3^9)^5$

---

(۹)

$a, aq, aq^2, \dots$

$aq - aq^2 = aq(1-q)$ جمله دوم جدید

$a - aq = a(1-q)$ جمله اول جدید

$\frac{\cancel{a}q(\cancel{1-q})}{\cancel{a}(\cancel{1-q})} = q'$

ص

$\Rightarrow$ قدر نسبت آن با قدر نسبت دنباله اولیه برابره

۱۶- ثابت کنید

۳

ب) $S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right)$

$S_n = a, aq, aq^2, \dots aq^{n-1}$

۲ طرف را در q ضرب می‌کنیم

$q S_n = aq + aq^2 + \dots aq^n$

$S_n - qS_n = (a + aq + \dots aq^{n-1}) - (aq + aq^2 \dots + aq^n)$

$S_n(1-q) = a - aq^n \rightarrow S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$

الف) $S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$

$S_n = a + a+d + a+2d, \dots a_n$

$a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\begin{cases} S_n = a_1 + a_2 + a_3 \cdots a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_2 + a_1 \end{cases}$$

۲ طرفین را جمع می‌کنیم

$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) \cdots (a_n + a_1)$

تصاعد حسابی متقارن هست

$2S_n = n(a_1 + a_n)$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$