سیده الاء هاشمی — تکلیف شماره ی ۱۴ — کلاس دهم دخترانه A

---

①

$a_n = \frac{۱}{۲}, ۱, ۲, \dots$ $\underbrace{}_{\times ۲}\ \underbrace{}_{\times ۲}$

$aq^{(n-۱)} \Rightarrow \frac{۱}{۲}\times ۲^{n-۱} = ۲^{n-۲}$

الف) جمله ی دهم: $۲^{\overset{۱۰}{n-۲}} \Rightarrow ۲^{۸} = \boxed{۲۵۶}$

ب) حاصل $\frac{a_{۱۷}}{a_{۱۳}} \Leftarrow \frac{۲^{۱۵}}{۲^{۱۱}} = ۲^{۴} = \boxed{۱۶}$

ج) واسطه ی هندسی بین جملات چهارم و دهم: جمله ی دهم $= ۲۵۶$ جمله ی چهارم $= ۲^{۲} = ۴$

$q^{k-۱} = \frac{b}{a} \Rightarrow ۲^{k-۱} = \frac{۲۵۶}{۴} \Rightarrow ۲^{k-۱} = ۶۴ \Rightarrow \boxed{k = ۷}$

۷ واسطه ی هندسی

د) $۲^{n-۲} = ۱۲۸ \Rightarrow ۲^{۷} = ۱۲۸ \rightarrow \boxed{n = ۹}$

---

②

$aq^{۴} = ۱۲$

$aq^{۷} = ۹۶$

$$\frac{\cancel{a}q^{۷} = ۹۶}{\cancel{a}q^{۴} = ۱۲}$$

$q^{۳} = ۸ \Rightarrow q = ۲$

$\Rightarrow ۱۶a = ۱۲ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$

جمله ی دهم $= \frac{۳}{۴}\times ۲^{۹} = \frac{\cancel{۵۱۲}\times ۳}{۴} = \boxed{۳۸۴}$

---

③

$a_۱ \times a_۲ \times a_۳ \times a_۴ \times a_۵ = ۲۴۳$

الف) مقدار $a_۳ =$ $a_۳^{۵} = ۲۴۳ \Rightarrow \boxed{a_۳ = ۳}$

ب) مقدار $a_۱ \times a_۵ =$ $a_۱ \times a_۵ = a_۳ \times a_۳ \Rightarrow a_۱ \times a_۵ = \boxed{۹}$

---

④

$(۴\sqrt{۲})^{۲} = ۲^{a} \times ۲^{b} \Rightarrow ۳۲ = ۲^{a+b}$ $a+b = ۵$

واسطه ی حسابی $= \boxed{\frac{۵}{۲}}$

$\frac{a+b}{۲}$

---

⑤

$a_۳ = ۱-x$ $a_۷ = x$ $a_{۱۱} = x+۱$

$\frac{a_۷}{a_۳} = q^{۷-۳} = q^{۴}$ $\frac{a_{۱۱}}{a_۷} = q^{۱۱-۷} = q^{۴}$

$\frac{x}{۱-x} = \frac{x+۱}{x}$

$x^{۲} = (۱-x)(x+۱) \Rightarrow x^{۲} = ۱ - x^{۲}$

$۲x^{۲} = ۱$

$x^{۲} = \frac{۱}{۲}$

$x = \pm \frac{۱}{\sqrt{۲}}$

$\boxed{x = \frac{۱}{\sqrt{۲}}}$ یا $\boxed{x = -\frac{۱}{\sqrt{۲}}}$

---

⑥

$a + aq^{۳} = ۲۸$ $aq + aq^{۲} = ۱۲$

$\frac{a+aq^{۳}}{aq+aq^{۲}} \Rightarrow \frac{\cancel{a}(۱+q^{۳})}{\cancel{a}q(۱+q)} \Rightarrow \frac{۱-q+q^{۲}}{q} = \frac{۷}{۳}$

$۳ - ۳q + ۳q^{۲} = ۷q$ $۳q^{۲} - ۱۰q + ۳ = ۰$ $q = \frac{۱۰ \pm ۸}{۶}$ $q = ۳$ $q = \frac{۱}{۳}$

$q = ۳ \longrightarrow a = \frac{۱۲}{۳\times ۴} = ۱$ $۱, ۳, ۹, ۲۷$

$q = \frac{۱}{۳} \longrightarrow a = \frac{۱۲}{\frac{۱}{۳}\times\frac{۴}{۳}} = ۲۷$ $۲۷, ۹, ۳, ۱$

(۷)

$a+aq+aq^{۲}=۱۳$, $a(1+q+q^{۲})=۱۳$ $\quad \frac{۳}{q}(1+q+q^{۲})=۱۳$ $\quad ۳(1+q+q^{۲})=۱۳q$

$a\times aq\times aq^{۲}=۲۷$, $a^{۳}q^{۳}=۲۷$ $\quad (aq)^{۳}=۲۷\rightarrow aq=۳$ $\quad a=\frac{۳}{q}$ $\quad ۳+۳q+۳q^{۲}=۱۳q$

$۳q^{۲}-۱۰q+۳=۰$

$۳q^{۲}-۱۰q+۳=۰$ $\quad \Delta=(-۱۰)^{۲}-۴\times۳\times۳=۱۰۰-۳۶=۶۴$ $\quad q_{۱}=۳$

$q_{۲}=\frac{۱}{۳}$

$aq=۳$ $\quad q=۳\Rightarrow a=۱$ $\quad \boxed{۱,۳,۹}$

$q=\frac{۱}{۳}\Rightarrow a=۹$ $\quad \boxed{۹,۳,۱}$

---

(۸) الف) مجموع ۱۰ جمله ی اول =

$a_n=\underset{\times۳\ \ \times۳}{۲,۶,۱۸},\ldots$ $\quad S_n=a\left(\frac{q^{n}-1}{q-1}\right)$ $\quad \frac{\cancel{۲}}{۱}\left(\frac{۳^{۱۰}-۱}{\cancel{۲}}\right)=۳^{۱۰}-۱=\boxed{۵۹۰۴۸}$

ب) حاصل ضرب ۱۰ جمله ی اول =

$\underbrace{۱+\cdots+۹}$ $\quad \frac{۱۰\times۹}{۲}=۴۵$

$\underset{\downarrow\ ۲}{a}\times a\underset{\downarrow\ ۳}{q}\times aq^{۲}\times\cdots aq^{۹}=\boxed{۲^{۱۰}\times۳^{۴۵}}$

---

(۹)

$a_n=aq^{(n-1)}$ $\quad d_n=a_{n+1}-a_n$ $\quad d_n=aq^{n}-aq^{n-1}=aq^{n-1}(q-1)=a(q-1)q^{n-1}$

$a(q-1)$ ← یک دنباله ی هندسی است که جمله ی اول

---

(۱۰) الف) مجموع جملات در تصاعد حسابی

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

$a+(a+d)+(a+۲d)+\cdots+a_n$

$\underbrace{(a+a+a+a+\cdots+a)}_{an}+\underbrace{(0+d+۲d+۳d+\cdots+d_n)}$

$d\,(\underbrace{0+1+۲+۳+\cdots+(n-1)}_{\frac{n(n-1)}{۲}}\Rightarrow\frac{n(n-1)}{۲}\times d+an=S_n$

$S_n=\frac{n}{۲}\left[۲a+(n-1)d\right]$

ب) مجموع جملات در تصاعد هندسی

$a+aq+aq^{۲}+\cdots+aq^{(n-1)}=S_n$

ضرب q $\Rightarrow aq+aq^{۲}+aq^{۳}+\cdots+aq^{n}=S_nq$

$S_n=\frac{a(1-q^{n})}{1-q}=a\left(\frac{q^{n}-1}{q-1}\right)$

$S_n-S_nq=(a+\cancel{aq}+\cancel{aq^{۲}}+\cdots+\cancel{aq^{(n-1)}})-(\cancel{aq}+\cancel{aq^{۲}}+\cdots+aq^{n})\Rightarrow S_n(1-q)=a(1-q^{n})$