/ /

سارا عزیزی - تکلیف شماره ۱۴

۱) $a_n = \frac{1}{2}, 1, 2, \ldots \to a = \frac{1}{2}, r = 2 \to a_n = ar^{n-1} = \frac{1}{2}\times 2^{n-1}$

الف) $a_n = \frac{1}{2}\times 2^9 = 2^8 = \boxed{256}$

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{a_{13}r^4}{a_{13}} = r^4 = 2^4 = \boxed{16}$

ج) $a_7 = a_{10}, a_4$ واسطه هندسی $\to a_7 = \frac{1}{2}\times 2^6 = 2^5 = \boxed{32}$

د) $\frac{1}{2}\times 2^{n-1} = 128 \to 2^{n-1} = 2^8 \to n-1 = 8 \to \boxed{n=9}$

۲) $a_5 = 12, a_8 = 96 \to \frac{a_8}{a_5} = \frac{a_5 r^3}{a_5} = r^3 = \frac{96}{12} = 8 \to r = 2$

$\to a_5 = ar^4 = a\times 16 = 12 \to \underline{a = \frac{3}{4}} \to a_{10} = ar^9 = \frac{3}{4}\times 2^9 = 3\times 128 = \boxed{384}$

۳) الف) $a_1\times a_2\times a_3\times a_4\times a_5 = (a_3)^5 = 243 \to \boxed{a_3 = 3}$

ب) $a_1\times a_5 = a_3\times a_3 = 3\times 3 = \boxed{9}$

۴) $2^a, 4\sqrt{2}, 2^b \to 2^a, \sqrt{32}, 2^b \to 2^a, 2^{\frac{5}{2}}, 2^b \to (2^{\frac{5}{2}})^2 = 2^a\times 2^b$

$\to 2^5 = 2^{a+b} \to a+b = 5 \to \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2} = \boxed{2.5}$

۵) $a_3 = 1-x, a_7 = x, a_{11} = x+1 \to a_7 =$ واسطه هندسی a_3, a_{11}

$\to x^2 = (1-x)(1+x) \to x^2 = 1-x^2 \to 2x^2 = 1 \to x^2 = \frac{1}{2} \to \boxed{x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}}$

dotnote

$a+ar^۳=۲۸ \to a(۱+r^۳)=۲۸ \quad , ar+ar^۲=۱۲ \to ar(۱+r)=۱۲$ (۶)

$\to \dfrac{\cancel{a}(۱+r^۳)}{a r(۱+r)} = \dfrac{(۱+r)(۱+r^۲-r)}{r(۱+r)} = \dfrac{۲۸}{۱۲} = \dfrac{۷}{۳} \to ۳r^۲-۳r+۳=۷r \to ۳r^۲-۱۰r+۳=۰$

$\to r=\dfrac{۱۰\pm\sqrt{۶۴}}{۶} \to \dfrac{۱۰+۸}{۶}=۳=r$ یا $\dfrac{۱۰-۸}{۶}=\dfrac{۲}{۶}=\dfrac{۱}{۳}=r$

$r=\dfrac{۱}{۳} \to \dfrac{۳}{۹}a+\dfrac{۱}{۹}a=\dfrac{۴}{۹}=۱۲ \to a=۲۷ \to \boxed{۲۷},۹,۳,۱$

$r=۳ \to ۳a+۹a=۱۲ \to a=۱ \to ۱,۳,۹,\boxed{۲۷}$

$a_۱+a_۲+a_۳=۱۳ \to \dfrac{a_۲}{r}+a_۲+a_۲r=۱۳ \to \dfrac{۳}{r}+۳+۳r=۱۳ \quad , ۳+۳r+۳r^۲=۱۳r$ (۷)

$\to ۳r^۲-۱۰r+۳=۰ \to r=\dfrac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۳۶}}{۶} \to r=\dfrac{۱}{۳} \to a_۱=۹ \, , a_۳=۱$

$\qquad r=۳ \to a_۱=۱ \, , a_۳=۹$ $\quad$ $۹,۳,۱$ یا $۱,۳,۹$

$a_۱\times a_۲\times a_۳=۲۷ \to (a_۲)^۳=۲۷ \to a_۲=۳$

الف) $S_{۱۰}=۲\left(\dfrac{۳^{۱۰}-۱}{۳-۱}\right)=۲\times\dfrac{۳^{۱۰}-۱}{۲}=۳^{۱۰}-۱=\boxed{۵۹۰۴۸}$ (۸)

ب) $P_{۱۰}=\sqrt{(a_۱a_{۱۰})^{۱۰}}=(a_۱a_{۱۰})^۵=(۲\times۲\times۳^۹)^۵=\boxed{۲^{۱۰}\times۳^{۴۵}}$

$a, aq, aq^۲, aq^۳, \ldots \qquad aq-a=a(q-1)$ (۹)

$\qquad aq^۲-aq=aq(q-1) \quad \times q$

$\qquad aq^۳-aq^۲=aq^۲(q-1) \quad \times q$

الف) $a, a+d, a+۲d, \ldots, a+(n-1)d \to S_n=a+(a+d)+(a+۲d)+\cdots+(a+(n-1)d)$ (۱۰)

$\to ۲S_n=\underbrace{(a+a+(n-1)d)}_{۲a+(n-1)d}+\underbrace{(a+d+a+(n-۲)d)}_{۲a+(n-1)d}+\cdots+\underbrace{(a+(n-1)d+a)}_{۲a+(n-1)d}$

$۲S_n=n(۲a+(n-1)d) \to S_n=\dfrac{n}{۲}(۲a+(n-1)d)$

ب) $S_n=a+aq+aq^۲+\cdots+aq^{n-1}$

$qS_n=aq+aq^۲+aq^۳+\cdots+aq^n$

$S_n-qS_n=a-aq^n \to S_n(1-q)=a(1-q^n)$

$\to S_n=a\left(\dfrac{1-q^n}{1-q}\right)=a\left(\dfrac{q^n-1}{q-1}\right)$