مامانی : کمامیل نژاد — ۱۴۰۴/۰۸/۱۴ — تکلیف شماره ۱۳

19.75

۱) $a_n = \frac{1}{2}, 1, 2, \dots$ ($\times 2$, $\times 2$) $\Rightarrow \boxed{q = 2}$

الف) $a_{10} = ?$

$$a_n = \frac{1}{2}(2)^{n-1} \Rightarrow a_{10} = \frac{1}{2}(2)^9 = 2^8 = \boxed{256}$$

ب) $\frac{a_{17}}{a_{13}} = ?$

$$a_{17} = \frac{1}{2}(2)^{16} = 2^{15}$$
$$a_{13} = \frac{1}{2}(2)^{12} = 2^{11}$$
$$\Rightarrow \frac{a_{17}}{a_{13}} = \frac{2^{15}}{2^{11}} = \boxed{2^4 = 16}$$

ج) *

$$256 \times 4 = 1024 = 2^{10}$$
$$a_{10} = 2 \times (\frac{1}{2})^9 = 256 \Rightarrow b^2 = (2^5)^2 \Rightarrow \boxed{b = 2^5 = 32}$$
$$a_4 = 2 \times (\frac{1}{2})^3 = 4$$

د)

$$128 = \frac{1}{2}(2)^{n-1} \Rightarrow 128 = \frac{1}{2} \times 2^n \times 2^{-1} = 128 \times 4 = 2^n \Rightarrow \underbrace{512}_{2^9} = 2^n \Rightarrow \boxed{n = 9}$$

نهمین جمله دنباله است.

۲) $a_{10} = ?$

$$\frac{a_8}{a_5} = \frac{aq^7}{aq^4} = \frac{96}{12} \Rightarrow q^3 = 8 \Rightarrow \boxed{q = 2}$$

$$a_{10} \Rightarrow a_8 q^2 \Rightarrow 96 \times 4 = 384 \Rightarrow \boxed{a_{10} = 384}$$

۳) $a_1 \times a_2 \times a_3 \times a_4 \times a_5 = 243$

الف) $a_3 = ?$

$$P_n = (\text{جمله وسط})^n \Rightarrow 243 = (a_3)^5 \Rightarrow \boxed{a_3 = 3}$$

ب) $a_1 \times a_5 = ?$

$$(a_1 \times a_5)(a_2 \times a_4) \times 3 = 243 \Rightarrow (a_1 \times a_5)(a_2 \times a_4) = 81 \Rightarrow (a_1 \times a_5) = \boxed{\pm 9}$$

۴) *

واسطه هندسی $\Rightarrow (4\sqrt{2})^2 = 2^b \times 2^a \Rightarrow 2^5 = 2^{b+a} \Rightarrow \boxed{b + a = 5}$

واسطه حسابی $\Rightarrow \frac{a+b}{2} \Rightarrow \frac{5}{2} = \boxed{2/5}$ ✓

۵) $a_3 = 1 - x$ ، $a_7 = x$ ، $a_{11} = x + 1$

$$\frac{a_7}{a_3} = q^4 \Rightarrow q^4 = \frac{x}{1-x} \quad , \quad \frac{a_{11}}{a_7} = \frac{x+1}{x} \quad , \quad \frac{x+1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

$$1 - x^2 = x^2 \Rightarrow 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}}$$ یا

$$\boxed{\pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}}$$

← فقط $\frac{\sqrt{2}}{2}$ قبول

1.75

Scanned with CamScanner

۶) $a_1 + a_4 = ۲۸$ ، $a_2 + a_3 = ۱۲$ ، درین جملات اول تا چهارم مقدار سوم بزرگترین است؟

$$\frac{a_1 + a_1 r^3}{a_1 r + a_1 r^2} = \frac{۲۸}{۱۲} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow \frac{a_1(1+r^3)}{a_1(r+r^2)} = \frac{(1+r^3)}{(r+r^2)} = \frac{(1+r)(1-r+r^2)}{r(1+r)}$$

$$\frac{1-r+r^2}{r} = \frac{۷}{۳} \Rightarrow ۳ - ۳r + ۳r^2 = ۷r \Rightarrow ۳r^2 - ۱۰r + ۳ = ۰ \xrightarrow{\text{روش}} r^2 + ۱۰r + ۹ \rightarrow$$

$(r-۹)(r-۱) \rightarrow r \begin{cases} \frac{۹}{۳} = ۳ \Rightarrow -۱, ۳, ۹, ۲۷, \dots \\ \frac{۱}{۳} \Rightarrow ۲۷, ۹, ۳, ۱, \dots \end{cases}$ ← ۲۷ بزرگترین مقدار درین جملات است

$r = ۳ \Rightarrow ۳a_1 \times ۳^3 = ۱۲a_1 = ۱۲ \rightarrow a_1 = ۱$ ، $r = \frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{۱}{۳} \times a_1 \times \frac{۳^3}{۳^3} = \frac{۲۷}{۹} a_1 = ۱۲ \Rightarrow a_1 = ۲۷$

---

۷) $a_1 + a_2 + a_3 = ۱۳$ ، $a_1 \times a_2 \times a_3 = ۲۷$ ، $a_1 + a_1 q + a_1 q^2 \rightarrow a_1(1+q+q^2) = ۱۳$

$a_1^3 q^3 = ۲۷ \Rightarrow (a_1 q)^3 = ۳^3 \Rightarrow a_1 q = ۳ \Rightarrow a_2$

$a_1 + a_3 = ۱۰ \Rightarrow a_1(1+q^2) = ۱۰ \Rightarrow a_1 + \frac{a_2}{۳} q = ۱۰$ ، $a_1 \times a_3 = ۱۰ \Rightarrow a_1 a_1 q^2 = ۹ \Rightarrow a_1 q = ۳$

$a_1 = ?$ ، $a_2 = ?$ ، $a_3 = ?$

$\frac{۳ + ۳q}{q} = ۱۰ \Rightarrow ۳ + ۳q^2 - ۱۰q = ۰$ ، $a_1 = \frac{۳}{q}$

$\begin{cases} ۳q^2 - ۱۰q + ۳ = ۰ \\ q^2 - ۱۰q + ۹ = ۰ \Rightarrow (q-۹)(q-۱) \Rightarrow q \end{cases}$ ← $۳ = ۱, ۳, ۹$ ، $\frac{۱}{۳} = ۹, ۳, ۱$

---

۸) $a_n = ۲, ۶, ۱۸, \dots$ ، $q = ۳$ ($\times ۳$ ، $\times ۳$)

الف) $S_{۱۰} = ?$

$$S_{۱۰} = ۲ \times \left(\frac{۳^{۱۰} - ۱}{۳ - ۱} \right) = \frac{S_{۱۰} = ۳^{۱۰} - ۱}{} \Rightarrow S_{۱۰} = ۵۹۰۴۸$$

ب) $P_{۱۰} = ?$

$$P_{۱۰} = (a_1 \times a_{۱۰})^{۵} \Rightarrow (a_1 \times a_1 \times q^9)^{۵} = (۲ \times ۲ \times ۳^9)^{۵} = (۴ \times ۳^9)^{۵} =$$

$$P_{۱۰} = \boxed{۲^{۱۰} \times ۳^{۴۵}}$$

---

۹) $aq - a$ ، $aq^2 - aq$ ، $aq^3 - aq^2$ ، $aq^4 - aq^3$ ، $\dots$

$a(q-1)$ ، $aq(q-1)$ ، $aq^2(q-1)$ ، $aq^3(q-1)$ ، $\dots$

($\times q$ ، $\times q$ ، $\times q$)

قدرنسبت $= q$

$$q = \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow \frac{aq(q-1)}{a(q-1)} = q$$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a_1 + (n-1)d) \Rightarrow S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-1}$

۱۰) الف) اثبات شد

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + ۲d) + \dots + [a_1 + (n-۲)d] + [a_1 + (n-1)d]$$

$$+ \quad S_n = [a_1 + (n-1)d] + \dots + (a_1 + d) + a_1$$

$$۲S_n = [a_1 + a_1 + (n-1)d] + \dots + [a_1 + (n-۲)d + a_1 + d] + [a_1 + (n-1)d + a_1]$$

$$۲S_n = ۲a_1 + (n-1)d + \dots + ۲a_1 + (n-1)d + ۲a_1 + (n-1)d$$

$$۲S_n = n \times [۲a_1 + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n}{۲} \times [۲a_1 + (n-1)d]$$

ب) اثبات شد

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$$

$$q S_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

$$S_n - q S_n = a - aq^n$$

$$S_n(1-q) = a(1-q^n)$$

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_n = a\left(\frac{q^n - 1}{q - 1}\right) \Leftarrow$$