تکلیف شماره ۱۳ — دهم دختر A — سارینا زارع — ۱۴/۸/۴

①

$a_1 = ۴۰$

$a_۴ = ۶۱ \rightarrow a_1 + ۳d = ۶۱ \rightarrow ۴۰ + ۳d = ۶۱ \rightarrow ۳d = ۲۱ \rightarrow \boxed{d = ۷}$

$a_n = ۴۰ + (n-1) \times ۷ \rightarrow ۴۰ + (n-1) \times ۷ = ۲۰۸ \rightarrow n - 1 = ۲۴ \rightarrow \boxed{n = ۲۵}$

②

$a_1 = ۱۰۱$ ، $a_{آخر} = ۹۹۷$

$۹۹۹ \div ۷ = ۱۴۲$ ، ۹۹۴ ، باقیمانده $۵ \rightarrow -۲$ ، $۹۹۹ - ۲ = ۹۹۷$

$\rightarrow \frac{۹۹۷ - ۱۰۱}{۷} + 1 = \underline{۱۲۹}$

③

$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = -۶n + ۱۲ \xrightarrow{n=1} a_۲ + a_۳ + a_۴ = ۶$

$a + d + a + ۲d + a + ۳d = ۶ \rightarrow ۳a + ۶d = ۶ \rightarrow a + ۲d = ۲ \xrightarrow{\times -1} -a - ۲d = -۲$

$\xrightarrow{n=۲} a_۳ + a_۴ + a_۵ = ۰ \rightarrow a + ۲d + a + ۳d + a + ۴d = ۰ \rightarrow ۳a + ۹d = ۰ \rightarrow a + ۳d = ۰$

$\left.\begin{array}{l} -a - ۲d = -۲ \\ a + ۳d = ۰ \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} d = -۲ \\ a = ۶ \end{array} \rightarrow a_n = ۶ + (n-1) - ۲$

$\left.\begin{array}{l} a_{۱۷} = ۶ + (۱۶ \times -۲) = -۲۶ \\ a_۸ = ۶ + (۷ \times -۲) = -۸ \end{array}\right\} \boxed{a_{۱۷} + a_۸ = -۳۴}$

④

$۲^{x+1} = \underline{۲^x - 1} + \underline{۲^{۲x} - ۳} \Rightarrow ۲^{x+۲} = ۲^x + ۲^{۲x} - ۴ \rightarrow ۲^x + ۲^{۲x} - ۴ - ۴ \times ۲^x = ۰$

$۲^{۲x} - ۳ \times ۲^x - ۴ = ۰ \Big\} \underline{y = ۲^x , y^۲ = ۲^{۲x}} \rightarrow y^۲ - ۳y - ۴ = ۰ \rightarrow (y-۴)(y+1) = ۰ \rightarrow y = ۴ , y = -1$

$y = -1 \rightarrow ۲^x \neq -1$

$y = ۴ \rightarrow ۲^x = ۲^۲ \rightarrow \boxed{x = ۲}$

$\left.\begin{array}{l} a_۳ = ۲^x - 1 = ۲^۲ - 1 \rightarrow \boxed{۳} \\ a_۸ = ۲^{x+1} = ۲^۳ = \boxed{۸} \\ a_{۱۳} = ۲^{۲x} - ۳ = ۲^۴ - ۳ = ۱۳ \end{array}\right\} ۳ + ۸ + ۱۳ = \boxed{۲۴}$

/ /

(۵)

$\overbrace{a_{۱۲}}^{a+۱۱d} - \overbrace{a_{۱۰}}^{a+۹d} = ۵ \rightarrow \cancel{a}+۱۱d-\cancel{a}-۹d = ۵ \rightarrow ۲d = ۵ \Rightarrow d = ۲/۵$

$a_{۱۰}+a_{۱۲} = ۲۵ \rightarrow a+۱۱d+a+۹d = ۲۵ \rightarrow ۲a+۲۰d = ۲۵ \rightarrow ۲(a+۱۰d) = ۲۵$

$\underbrace{a+۱۰d}_{\rightarrow ۲۵} = ۱۲/۵ \xrightarrow{d=۲/۵} a = -۱۲/۵$

$a_{۲۱} = -۱۲/۵ + ۲۰ \times ۲/۵ \Rightarrow ۳۷/۵$

(۶)

$\dfrac{a_۱+a_۲+a_۳+a_۴+a_۵}{a_۶+a_۷+a_۸+a_۹+a_{۱۰}} = \dfrac{۱}{۳} \rightarrow \dfrac{a_۲}{a_۱} = ?$

$S_n = \frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$

$S_۵ = \frac{۵}{۲}(۲a+۴d) = ۵(a+۲d) = ۵a+۱۰d$

$S_{۱۰} = \frac{۱۰}{۲}(۲a+۹d) = ۱۰a+۴۵d$

$S_{۱۰} - S_۵ = S_{۱۰ \text{ تا } ۵} \Rightarrow ۱۰a+۴۵d-۵a-۱۰d = ۵a+۳۵d = ۵(a+۷d)$

$۵(a+۲d) = \frac{۱}{۳} \times ۵(a+۷d) \rightarrow a+۲d = \frac{۱}{۳}(a+۷d)$

$۳a+۶d = a+۷d \rightarrow d = ۲a$; $a_۱ = a$; $a_۲ = a+d \Rightarrow a+۲a = ۳a$

$\dfrac{a_۲}{a_۱} = \dfrac{۳a}{a} = \boxed{۳}$

(۷)

$t_n = t_{n-۳} + ۱۵ \quad . \quad \dfrac{t_۹^۲ - t_۵^۲}{t_۷}$

$t_n - t_{n-۳} = ۳d \rightarrow ۳d = ۱۵ \rightarrow d = ۵$

$t_۹^۲ - t_۵^۲ = (t_۹+t_۵)(t_۹-t_۵)$

$t_۹ - t_۵ = (۹-۵)d = ۴d = ۲۰$

$t_۹ + t_۵ = [a+۸d] + [a+۴d] = ۲a+۱۲d$

$\rightarrow t_۹^۲ - t_۵^۲ = ۲۰ \times (۲t_۷) = ۴۰t_۷ \rightarrow \dfrac{t_۹^۲ - t_۵^۲}{t_۷} = \boxed{۴۰}$

(۸)

$$d=\frac{۲+\sqrt{۳}-۲(۱-۶\sqrt{۳})}{۱۲+۱}=\frac{\cancel{۲}+\sqrt{۳}\cancel{-۲}+۱۲\sqrt{۳}}{۱۳}=\frac{۱۳\sqrt{۳}}{۱۳}=\boxed{\sqrt{۳}=d}$$

(۹)

$$d=\frac{۳۲-۲}{۴n-۳+۱}=\frac{۳۰}{۴n-۲}=\frac{۱۵}{۲n-۱}$$

تعداد جملات واسطه + جمله اول و آخر $=۴n-۳+۲=۴n-۱$

$$a_{n+1}=۲+nd=۱۱\rightarrow ۲+n\times\frac{۱۵}{۲n-۱}=۱۱\rightarrow\frac{۱۵n}{۲n-۱}=\frac{۹}{۱}$$

$$۱۵n=۱۸n-۹\rightarrow\boxed{n=۳}$$

(۱۰)

$$a_n+a_{n+۴}=a_{۳}+a_{۱۷}$$

$$\frac{a_n}{a_{\frac{n}{۲}}}=۳$$

$$a_x=۰\rightarrow x=?$$

$$[a+(n-۱)d]+[a+(n+۳)d]=[a+۲d]+[a+۱۶d]$$

$$۲a+(۲n+۲)d=۲a+۱۸d\rightarrow ۲n+۲=۱۸\rightarrow\boxed{n=۸}$$

$$a_{۸}=۳a_{۴}\rightarrow a+۷d=\underbrace{۳(a+۳d)}_{۳a+۹d}\rightarrow\underbrace{۲d+۲a=۰}_{۲(d+a)\rightarrow d+a=۰}\rightarrow a=-d$$

$$a_x=۰\rightarrow a+(x-۱)d=۰\rightarrow -d+(x-۱)d=۰\rightarrow(x-۲)d=۰\rightarrow\boxed{x=۲}$$